

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES PURES.

TOME SECOND.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES PURES.

TOME SECOND.

Préférez, dans l'enseignement, les méthodes générales; attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même tems qu'elles sont presque toujours les plus faciles.

LAPLACE, *Ecoles norm.*, tom. IV, p. 49.

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES PURES,

DÉDIÉ

A S. M. ALEXANDRE Ier.,

EMPEREUR DE RUSSIE;

PAR L.-B. FRANCŒUR,

Professeur de la faculté des Sciences de Paris, de l'École normale et du Lycée Charlemagne, Officier de l'Université, Examinateur des candidats de l'École impériale Polytechnique, Membre honoraire du département de la marine russe, Correspondant de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, des Académies de Rouen, Cambray, etc.

Ouvrage destiné aux élèves des Écoles Normale et Polytechnique, et aux candidats qui se préparent à y être admis.



A PARIS,

Chez Mad. Ve. BERNARD, Libraire, quai des Augustins;
FIRMIN DIDOT, Libraire, rue de Thionville.

M. DCCC. IX.

IMPRIMERIE DE H. PERRONNEAU.



TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES

DANS LE SECOND VOLUME.

LIVRE V. ALGÈBRE TRANSCENDANTE.

LIVRE VI. ANALYSE APPLIQUÉE AUX TROIS DIMENSIONS.

LIVRE VII. CALCUL DIFFÉRENTIEL.

LIVRE VIII. CALCUL INTÉGRAL.

Errata du Tome premier.

Page 55, ligne 5 ; mètres, *lisez*, géomètres.

61, 13 ; ainsi tout nombre, etc., *lisez*, tout nombre d'un seul chiffre étant compris entre 1 et 10, a son carré entre 1 et 100, c'est-à-dire, composé de 1 ou 2 chiffres.

76, 5 ; $=\frac{4}{5}$, *lisez*, $=\frac{4}{6}$.

114, 21 ; Ka, lisez, Ka^m.

182, 3 en remontant ; *lisez*, $L(z^3\sqrt[4]{z^3}) = Lz^3$, etc.

189, 18 ; les demi-cercles, *lisez*, les deux parties ABD AED coïncident.

250, 8 ; n étant...., *lisez*, n étant le nombre des côtés.

325, 12 ; $+$, *lisez*, $=$.

347, 4 ; $(50^\circ +)$, *lisez*, $(50^\circ + \varphi)$.

352, 20 ; $(x'' - x'')$, *lisez*, $(x'' - x')$.

360, 3 en remontant ; Oy, lisez, Dy.

362, 9 ; *lisez*, $\delta = -2\dfrac{\alpha + a\beta}{\sqrt{(1+a^2)}}$.

364, 2 ; $x = 0$, *lisez*, $x = R$.

389, 2 ; $(x - x)$, *lisez*, $(x - x')$.

Id. 3 ; $= 2x$, *lisez*, $= 2x'$.

391, avant-dernière ; *effacez*, l'angle ONA est droit dans l'hyperbole équilatère, car alors $aa' = 1$.

398, 11 ; yAx, lisez, yCx.

402, 15 ; $= a'^2b^2$, lisez, $= a'^2b'^2$.

406, 4 en remontant ; (6) et (428, 3°.), *lisez*, (406) et (427, 3°.).

Id. ôtez en marge, fig. 112.

Id. 17 ; *carré*, lisez, *rectangle*.

Page 407, ligne dernière, *lisez*, $-a^2 \tan^2 \alpha + b^2 = 0$

421, 23; }
422, 6; } $2A$, *lisez*, $4A^2$.

425, 12; faites la même rectification.

432, 16; C, lisez, O.

438, 14; le 2e. facteur donne le foyer, *lisez*, le 2e. facteur est visiblement étranger à la question (507, 3o.), puisqu'il donne le foyer.

449, 4 en remontant; *lisez*, $b = A + B\beta + C\beta^2 + \ldots$

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES PURES.

LIVRE CINQUIÈME.

ALGÈBRE TRANSCENDANTE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉLÉVATIONS DE PUISSANCES ET EXTRACTIONS DE RACINES.

Permutations et Combinaisons.

476. PROPOSONS-NOUS de former avec m lettres $a\,b\,c$... toutes les *Permutations*, c.-à-d., tous les *Arrangemens* différens, en les assemblant p à p; pour cela, ôtons d'abord la lettre a et supposons qu'on forme avec les $m-1$ lettres $b\,c$... qui restent, tous les arrangemens $p-1$ à $p-1$. Il est clair qu'en apportant a en tête de chacun, on aura tous ceux des arrangemens cherchés qui ont a pour initiale, sans qu'aucun manque ou soit répété deux fois. Si on ôte b, et qu'on en dise autant par rapport à $a\,c\,d$... on aura *un pareil nombre* de termes qui sont toutes celles

des permutations demandées qui commencent par b : celles-ci se déduisent des premières en changeant a en b. Ainsi de suite.

La question sera donc résolue lorsqu'on saura trouver tous les arrangemens de $m-1$ lettres, $p-1$ à $p-1$: or ce problème se ramène de même aux permutations de $m-2$ lettres $p-2$ à $p-2$; etc. : enfin on sera conduit à permuter $m-(p-1)$ lettres 1 à 1, ce qui n'arrêtera plus.

Cherchons, par exemple, tous les arrangemens 3 à 3 des 5 lettres du mot VERTU. Il faut d'abord obtenir les permutations 2 à 2 des 4 lettres *vertu*, puis ensuite placer en tête de chacune. Ces arrangemens 2 à 2 sont

vr, *vt*, *vu*, *rv*, *rt*, *ru*, *tr*, *tv*, *tu*, *ur*, *ut*, *uv*.

On les obtient en arrangeant 1 à 1 les lettres *rtu*, et plaçant *v* en tête, ce qui donne *vr vt vu*; on change ensuite *v* en *r*, puis en *t*, enfin en *u*, et réciproquement. Il reste à placer l'initiale *e*, et on a

evr, *evt*, *evu*, *erv*, *ert*, *eru*, *etr*, *etv*, *etu*, *eur*, *eut*, *euv*,

pour les arrangemens 3 à 3 qui commençent par *v*: enfin on change *e* en *v*, en *r*, en *t* et en *u*, et réciproquement, ce qui complète les 60 permutations demandées.

ver, *vet*, *veu*, *vre*, *vrt*, *vru*, *vtr*, *vte*, *vtu*, *vur*, *vut*, vue,
rve, *rvt*, *rvu*, *rev*, *ret*, *reu*, *rte*, *rtv*, *rtu*, rue, rut, *ruv*,
tvr, *tve*, *tvu*, *trv*, *tre*, *tru*, ter, *tev*, *teu*, *tur*, tue, *tuv*,
uvr, *uvt*, *uve*, *urv*, *urt*, ure, *utr*, *utv*, *ute*, *uer*, *uet*, *uev*.

On obtient de même les permutations de m lettres m à m. Par exemple, les 4 lettres du mot *mien* donnent les 24 arrangemens suivans (*).

(*) En appliquant cette théorie aux lettres d'un mot ou d'une

mien, mine, mein, *meni*, *mnei*, *mnie*;
imen, *imne*, *iemn*, *ienm*, *inem*, *inme*,
eimn, *einm*, *emin*, *emni*, *enmi*, enim,
niem, *nime*, *neim*, *nemi*, *nmei*, *nmie*.

477. Souvent on cherche moins les arrangemens eux-mêmes que leur multitude : soient $y\, y'\, y'' \ldots y^{(p-2)}$ les nombres de permutations de m lettres p à p, de $m-1$ lettres $p-1$ à $p-1$, de $m-2$ lettres $p-2$ à $p-2\ldots$ enfin de $m-(p-2)$ lettres 2 à 2. En ôtant a et arrangeant $p-1$ à $p-1$ les lettres $b\, c\, d\ldots$, le nombre de permutations est y' ; puis mettant a en tête on a y' arrangemens p à p. Mais, comme chaque lettre $b\, c\, d\ldots$ doit être initiale à son tour, elle doit comporter un pareil nombre y' d'arrangemens, et on a $y = my'$.

Raisonnons de même pour y', ou plutôt changeons ici m en $m-1$ et p en $p-1$; par là y et y' deviennent y' et y'', et on trouve $y' = (m-1)\, y''$.

De même on a $y'' = (m-2)\, y''' \ldots$

Enfin, pour $y^{(p-2)}$, il faut, dans $y = my'$, mettre $m-(p-2)$ pour m, et 2 pour p; y deviendra $y^{(p-2)}$, y' sera $m-(p-1)$, c.-à-d., le nombre d'arrangemens de $m-(p-1)$ lettres 1 à 1 ; donc on a les $p-1$ équations

---

sentence, on en forme le *Logogriphe* et l'*Anagramme*. C'est ainsi que *vertu* et *mien* ont produit plusieurs mots tant français que latins. Ces pénibles bagatelles ont cessé d'exercer les savans, malgré plusieurs résultats heureux en ce genre. l'assassin du Grand Henri, *Frère Jacques Clément*, a pour anagramme *C'est l'enfer qui m'a créé*. Jablonski en fit un latin, pour Stanislas, depuis roi de Pologne, et de la maison des *Leczenski* : *Domus Lescinia* produit les anagrammes *Ades incolumis*; *Omnis es lucida* ; *Mane sidus loci*, *Sis columna dei* ; *I scande solium* ; ce dernier est sur-tout remarquable parce qu'il fut prophétique.

$y = my', y' = (m-1)y'' \ldots y^{(p-1)} = (m-p+2)(m-p+1)$.

Pour en éliminer $y'\ y'' \ldots\ y^{(p-1)}$, il suffit de les multiplier toutes, et il vient

$$y = m(m-1)(m-2) \ldots (m-p+1) \ldots (1)$$

on devra prendre pour facteurs tous les nombres entiers compris entre m et $m-p+1$. On trouvera, par exemple, que le nombre de permutations de 10 lettres 6 à 6 est $10.9.8.7.6.5 = 151\,200$.

En faisant $m=p$, on obtient le nombre z des arrangemens de p lettres p à p,

$$z = p(p-1)(p-2)\ldots 3.2.1 = 1.2.3\ldots p. \quad (2)$$

Ainsi 8 lettres donnent 1.2.3.....8 ou 40320 permutations 8 à 8. Les formules 1 et 2 contiennent autant de facteurs.

478. Cherchons maintenant les *Combinaisons* ou *Produits différens* de m lettres p à p, c.-à-d., ceux des arrangemens qui ne sont pas formés des mêmes facteurs. Si ces combinaisons étoient connues, leur nombre étant x, il suffiroit pour en déduire les arrangemens, de prendre chaque produit de p lettres, et d'en opérer toutes les permutations p à p; chacun en donneroit z; le nombre y des arrangemens est donc xz. De $y = xz$, on tire

$$x = \frac{y}{z} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdots \frac{m-p+1}{p}. \quad (3)$$

Le nombre de ces fractions est p. Il suit de la nature de cette opération que x doit être un nombre entier, en sorte que la *formule* 1 *est divisible par la formule* 2 : c'est au reste ce qu'on pourroit prouver directement.

Il suit de là que 90 lettres ont

$90 \times \frac{89}{2} =$ 4 005... combinaisons 2 à 2
$4\,005 \times \frac{88}{3} =$ 117 480.............. 3 à 3
$117\,480 \times \frac{87}{4} =$ 2 555 190.............. 4 à 4
$2\,555\,190 \times \frac{86}{5} =$ 43 949 268.............. 5 à 5

ce sont les nombres d'ambes, ternes, quaternes et quines des 90 numéros de la loterie.

479. Pour combiner *a b c*.... 2 à 2, on portera *a* à côté de chacune des autres lettres *b c*....; puis *b* à côté de celles *c d*.... qui sont à sa droite, etc. Pour faire les combinaisons 3 à 3, on ôtera *a*, on combinera 2 à 2, *b c*.... comme il vient d'être dit : soit Q l'ensemble de ces produits 2 à 2, on portera *a* près de chacun, on aura celles des combinaisons où *a* entre. Pour avoir les autres, il faudra porter *b* à côté des produits 2 à 2 de *c d*.... et comme ces produits font partie de Q, il suffira de mettre *b* à côté des termes de Q qui en sont exempts, puis *c* à côté de ceux qui n'ont ni *b* ni *c*, etc.

Quelles sont, par exemple, les combinaisons 4 à 4 de *a b c d e f*? Je combine *c d e f* 2 à 2, et j'ai

cd ce cf de df ef;

apportant *b* près de chaque terme, *c* près des trois derniers, *d* près de *ef*, j'ai pour les combinaisons 3 à 3 de *b c d e f*,

bcd bce bcf bde bdf bef cde cdf cef def;

mettant enfin *a* près de chacune, *b* près des 4 dernières, *c* devant *def*, j'ai pour les 15 combinaisons cherchées

abcd abce abcf abde abdf abef acde acdf
acef adef bcde bcdf bcef bdef cdef.

En général, pour combiner *p* à *p* les lettres *a b c*...., on en supprimera $p - 2$, *ab*... *g h*, et on combinera d'abord 2 à 2 les autres *i k*.... puis apportant *h* à côté de chacune,

i à côté de celles qui sont sans i, k près de celles qui sont exemptes de i et k,.... on aura toutes les combinaisons 3 à 3, des lettres $h\,i\,k$..... On procédera de même à celles 4 à 4 de $g\,h\,i\,k$,... et ainsi de suite.

2. *Formule du Binome de Newton.*

480. Le produit $(x+a)(x+b)(x+c)$... devient $(x+a)^m$ lorsque $a=b=c$.... ; or il suit de ce qui a été démontré (97, 4°) que 1°. *les exposans de* x *décroissent de terme en terme d'une unité depuis* x^m *jusqu'à* x^0.

2°. Le coefficient de x^{m-1} étant la somme des seconds termes ou $a+b+c$..... devient ma ; ainsi le second terme est max^{m-1}.

3°. Le coefficient de x^{m-2} est la somme des produits 2 à 2 de a, b, c.... l'un de ces produits est a^2, qu'il faut répéter autant de fois qu'on peut former de produits différens avec une quantité (478) ou $m.\frac{m-1}{2}$: donc le 3e. terme est $m.\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2}$; et ainsi de suite.

Enfin le dernier terme est le produit $abcd$.... de tous les m seconds termes des facteurs, produit qui devient ici a^m. On a donc

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+m.\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2}+....+a^m. \quad (4).$$

Cette équation est connue sous le nom de son illustre inventeur ; le *Binome de Newton* est la plus importante et la plus usitée des valeurs *développées*. Pour avoir $(x-a)^m$, il faut mettre ici $-a$ au lieu de a, c.-à-d., changer de signe les termes où a porte un exposant impair.

481. Pour mettre en évidence la loi qu'observent les divers termes du développement de $(x+a)^m$, cherchons l'expression du terme T qui en a p avant lui, et qu'on

nomme le *Terme général*; il représente tour-à-tour tous ceux de la formule, en faisant $p = 1, 2, 3 \ldots$ ce terme est $T = Nx^{m-p}$, N désignant les combinaisons p à p des m lettres a, b, c.... qu'on fait ensuite égales entre elles. L'un de ces produits est a^p, qu'il faut répéter autant de fois que m lettres donnent de combinaisons p à p; ce nombre (478) est $N = \frac{y}{z}$; donc le terme général T est $\frac{y}{z} a^p x^{m-p}$, ou

$$T = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdots \frac{m-(p-1)}{p} a^p x^{m-p} \ldots\ldots (5).$$

1°. *Tous les coefficiens du Binome sont entiers* puisque $\frac{y}{z}$ l'est.

2°. Si on veut obtenir le terme qui en a $p+1$ avant lui, il faut mettre ici $p+1$ pour p; a^p devient a^{p+1}; d'où il suit que *les exposans de* a *croissent d'une unité à chaque terme, tandis que ceux de* x *décroissent*. De plus le coefficient de a^{p+1} ayant pour dernier facteur $\frac{m-p}{p+1}$, ceux qui le précèdent sont $\frac{y}{z}$, de sorte que ce terme est

$$\frac{y}{z} \cdot \frac{m-p}{p+1} a^{p+1} x^{m-p-1} = \frac{m-p}{p+1} \cdot \frac{a}{x} \times T.$$

On peut par là voir comment un terme peut se déduire de celui qui le précède, *il faut le multiplier par* $\frac{x}{a}$ *et par l'exposant de* x *dans ce terme, divisé par le nombre des termes qui le précèdent.*

3°. On ne peut supposer $p > m$, car l'un des facteurs du coefficient est $m - m$ ou zéro. Il y a $m + 1$ termes dans le développement.

4°. En changeant x en a et a en x, le terme $N.a^p x^{m-p}$

devient $Nx^p a^{m-p}$. Or le développement doit demeurer le même après cette mutation, de sorte que ce terme devoit y être compris, et comme il y a $m+1$ termes, on voit que N est aussi le coefficient du terme qui en a p après lui. Donc *les coefficiens des termes à égale distance des extrêmes sont les mêmes*. Si m est impair, le coefficient moyen revient deux fois comme les autres, si m est pair, il ne se trouve qu'une fois.

En faisant $m=5$, on auroit, par exemple,

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$$

on peut ici remarquer le retour des mêmes coefficiens 1, 5, 10 en sens inverse.

Pareillement pour avoir $(2b^3-5c^3)^5$, on fera $2b^3 = x$ $-5c^3 = a$, et comme on a $(x+a)^5$, il suffira de mettre ci-dessus $2b^3$ pour x, et $-5c^3$ pour a, il viendra

$$(2b^3-5c^3)^5 = 32b^{15} - 5.5c^3.16b^{12} + 10.25c^6.8b^9 - \text{etc.},$$
$$= 32b^{15} - 400c^3b^{12} + 2000c^6b^9 - 5000c^9b^6 + 625c^{12}b^3 - 3125c^{15}.$$

482. Lorsque $x=1$, la formule se simplifie. On a

$$(1+z)^m = 1 + mz + m.\frac{m-1}{2}z^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}z^3 \ldots \quad (6)$$

La difficulté des calculs à exécuter pour appliquer la formule du binome aux cas qui peuvent se présenter, a déterminé à préférer l'usage de la formule précédente. Voici donc comment on opérera.

1°. On ramènera l'expression proposée à la forme $(1+z)^m$, en divisant et multipliant par le 1er. terme. C'est ainsi que $(2a+3b)^4$ multiplié et divisé par $(2a)^4$ devient $(2a)^4\left(1+\frac{3b}{2a}\right)^4$; puis faisant $\frac{3b}{2a}=z$, on a $16a^4(1+z)^4$.

2°. On calculera la valeur numérique des divers coefficiens; pour cela, on écrira les nombres

$$m,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m-2}{3},\ \frac{m-3}{4},\ldots. \quad *$$

puis il ne restera plus qu'à multiplier le 1er. par le 2e., puis le produit par le 3e., puis encore ce produit par le 4e., etc.

3°. Il suffira ensuite de multiplier par $1, z, z^2, z^3\ldots$ les divers coefficiens ainsi calculés. Donc $(2a+3b)^4 = 16a^4(1+4z+6z^2+4z^3+z^4)$; et mettant $\frac{3b}{2a}$ pour z, on a $16a^4+96a^3b+216a^2b^2+\ldots.$

483. Pour élever un trinome $a+b+c$ à la puissance m, on fera $b+c=x$, et il faudra développer $(x+a)^m$; on substituera ensuite les puissances $1, 2, \ldots m$ de $b+c$ à celles de x. On trouve aisément le terme général de $(a+b+c)^m$.

Le même calcul s'applique à un quadrinome, et même à un polynome quelconque; on en conclut que..... $(a+b+c\ldots)^m$ est composé d'autant de termes de la forme

$$\frac{1.2.3.4\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots h \times 1.2.3\ldots k \times 1.2.3\ldots l \times \ldots} \times a^h b^k c^l\ldots.$$

qu'on peut attribuer à h, k, l... de valeurs entières et positives différentes, avec cette condition que .... $h+k+l+\ldots=m$: V. 12e. Jour. poly., pag. 30.

484. Lorsque m est entier, nous savons que le développement 6 est limité et qu'il appartient à $(1+z)^m$: cherchons maintenant à quoi il répond lorsque m est négatif ou fractionnaire (133). Pour cela soit. *

$$x = 1 + mz + m.\frac{m-1}{2}z^2 + \text{etc}\ldots$$

$$y = 1 + nz + n.\frac{n-1}{2}z^2 + \text{etc}\ldots$$

* Formons le produit xy. Mais il est inutile d'exécuter la multiplication, ce qui ne feroit connoître que les 1ers. termes du résultat et non la loi qui en gouverne le cours indéfini. Remarquons que si m et n sont entiers et positifs, $xy=(1+z)^{m+n}$; de sorte qu'en faisant $m+n=p$, on a

$$xy=1+pz+p.\frac{p-1}{2}z^2+\text{etc}\ldots$$

Or la forme d'un produit ne peut nullement dépendre de la grandeur des nombres que les lettres représentent; d'où il suit que le produit xy doit demeurer $1+pz+\ldots$ quels que soient m et n. Or il se présente ici deux cas :

1°. Soit m une fraction $\frac{h}{k}$ positive; faisons $m=n$, d'où $p=2m$ et $x^2=1+pz+$etc. : mais si on multiplie cette équation par $x=1+mz+$etc., il viendra pareillement

$$x^3=1+qz+q.\frac{q-1}{2}z^2+\text{etc}\ldots,$$

q étant$=m+p=3m$, etc.; donc en général r étant$=km$, on a

$$x^k=1+rz+r.\frac{r-1}{2}z^2+\ldots$$

Or km ou r est $=h=$ entier positif, ainsi $x^k=(1+z)^h$; donc $x=(1+z)^{\frac{h}{k}}=(1+z)^m$; ce qui prouve que le développement indéfini 6 est encore celui de $(1+z)^m$, lorsque m est une fraction positive.

2°. Soit m un nombre négatif (entier ou fractionnaire), et supposons qu'on ait pris n tel que $m=-n$; alors n est un nombre positif, et on a $y=(1+z)^n$; d'ailleurs p est nul, puisque $p=m+n$; donc $xy=1=x(1+z)^n$, d'où $x=(1+z)^{-n}=(1+z)^m$. Le développement 6 est donc encore celui de $(1+z)^m$ lorsque m est négatif.

En multipliant 6 par x^m et faisant ensuite $zx = a$, on retrouve la formule 4; ce qui prouve que $(x+a)^m$ a le même développement lorsque m est entier ou fractionnaire, positif ou négatif. Il en est de même du développement d'un polynome quelconque.

Il resteroit à démontrer que le développement de $(x+a)^m$ est encore le même, lorsque m est irrationnel, ou imaginaire, ou transcendant.... Mais comme nous n'en ferons pas usage maintenant, nous reviendrons sur ce sujet (655, IV).

485. Appliquons nos formules à des exemples.

I. Pour développer $\frac{a}{\alpha+\beta x}$ on mettra cette fraction sous la forme $\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+Kx}$, en posant $K=\frac{\beta}{\alpha}$. On développera aisément $(1+Kx)^{-1}$, et il viendra

$$\frac{a}{\alpha+\beta x}=\frac{a}{\alpha}\left(1-\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}-\frac{\beta^3x^3}{\alpha^3}\ldots\pm\frac{\beta^n x^n}{\alpha^n}\ldots\right)$$

On a une progression par quotient dont la raison est $-\frac{\beta x}{\alpha}$. (*Voy.* 144 et 561).

II. On donnera à $\sqrt{(a^2\pm x^2)}$ la forme $a\sqrt{\left(1\pm\frac{x^2}{a^2}\right)}$, ou $a(1\pm y^2)^{\frac{1}{2}}$, en faisant $ay=x$; et on obtiendra

$$\sqrt{(1\pm y^2)}=1\pm\frac{y^2}{2}-\frac{1.y^4}{2.4.}\pm\frac{1.3y^6}{2.4.6}-\frac{1.3.5y^8}{2.4.6.8}\pm\ldots.$$

$$\sqrt{(a^2\pm x^2)}=a\left(1\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{x^4}{a^4}\pm\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^6}{a^6}-\ldots\right)$$

Les coefficiens ont pour numérateur le produit des nombres impairs successifs 1, 3, 5,... le dénominateur est le produit des nombres pairs 2, 4, 6....

III. A l'aide de ces *séries* on peut approcher de la racine carrée de tout nombre irrationnel, en le coupant en deux parties, dont l'une, représentée par a^2, doit être un carré exact le plus grand possible ; on fait l'autre $= x^2$, et on substitue. La série est *Convergente*, c.-à.-d. que les termes vont en décroissant, et cela d'autant plus rapidement que x est plus petit par rapport à a.

Ainsi pour $\sqrt{8}$, comme $8 = 9 - 1$, on fait $a = 3$ et $x = 1$; on obtient $\sqrt{8} = 3\left(1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{648} \ldots\right)$. On rend la convergence plus rapide encore à l'aide du procédé suivant. La valeur des trois premiers termes donne $\frac{611}{216}$, dont le carré surpasse 8 de $\frac{73}{216^2}$ qu'on fera $= x^2$, puis $a = \frac{611}{216}$ et $\frac{x^2}{a^2} = \frac{73}{611^2}$; substituant de nouveau on trouve

$$\sqrt{8} = \frac{611}{216} - \frac{73}{2.216.611} - \frac{73^2}{8.216.611^3} \ldots = 2,828427124 74$$

en se bornant aux trois 1ers. termes. (*V.* 490).

IV. On obtiendra aisément les formules suivantes

$$(1 \pm y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}y^2 + \frac{1.3}{2.4}y^4 \mp \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8 \ldots$$

$$(a^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}\left[1 \mp \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^4}{a^4} \mp \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^6}{a^6} + \ldots\right]$$

$$\sqrt[3]{(a+x)} = \sqrt[3]{a}\left\{1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{a} - \frac{1}{9}\cdot\frac{x^2}{a^2} + \frac{5}{81}\cdot\frac{x^3}{a^3} - \frac{10}{243}\cdot\frac{x^4}{a^4} + \ldots\right\}$$

$$\sqrt[3]{(1-y^3)} = 1 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{9} - \frac{5y^9}{81} - \frac{10y^{12}}{243} - \frac{22y^{15}}{729} - \ldots$$

3. *Des Nombres figurés.*

486. Désignons par $\int_m$ la somme $a^m+b^m+c^m\ldots+l^m$ * des puissances m^e d'une suite de nombres en progression par différence $\div a.b.c\ldots k.l$, dont d est la raison. Comme on a $b=a+d$, $c=b+d,\ldots l=k+d$, en élevant ces équations à la puissance m, et désignant, pour abréger, les coefficiens de la formule du binome par m, A, $B\ldots$, on a

$$b^m=a^m+mda^{m-1}+Ad^2a^{m-2}+Bd^3a^{m-3}\ldots$$
$$c^m=b^m+mdb^{m-1}+Ad^2b^{m-2}+Bd^3b^{m-3}\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$l^m=k^m+mdk^{m-1}+Ad^2k^{m-2}+Bd^3k^{m-3}\ldots$$

Ajoutant ces équations, il vient

$$l^m-a^m=md(\textstyle\int_{m-1}-l^{m-1})+Ad^2(\int_{m-2}-l^{m-2})+Bd^3(\int_{m-3}-l^{m-3})\ldots$$

Si on fait $m=1, 2, 3\ldots$ on trouve

$$\int_0=\frac{l-a+d}{d};\quad \int_1=\frac{l^2-a^2}{2d}+\frac{l+a}{2};$$

$$\int_2=\frac{l^3-a^3}{3d}+\frac{l^2+a^2}{2}+\frac{l-a}{2.3}.d;\ \text{etc}\ldots$$

Par exemple, la série 2.3.4.5.6 donne

$$\int_0=5, \int_1=20, \int_2=90, \int_3=440,\ldots$$

De même pour $1.2.3.4\ldots n$, qui est la suite des nombres naturels, on a

$$\int_0=n;\quad \int_1=n.\frac{n+1}{2};\quad \int_2=n.\frac{n+1}{2}.\frac{2n+1}{3};$$

$$\int_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4};\quad \int_4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{6.5},\ \text{etc.}$$

* 487. Soit proposée une série qui ait pour terme général kn^p ; la somme de ses n premiers termes sera

$$k\,(1^p + 2^p + 3^p \ldots + n^p),\ = k\int_p,$$

valeur qui suit de ce qu'on vient de dire.

* Si le terme général est $kn^p + ln^r$, la suite peut être regardée comme formée de l'addition terme à terme des deux séries $k(1^p + 2^p + 3^p \ldots)$ et $l(1^p + 2^p + 3^p \ldots)$: le *terme sommatoire* est $k\int_p + l\int_r$.

Et ainsi de suite. On sait donc trouver le terme sommatoire de toute série algébrique dont on connoît le terme général. On résoudra aisément le problême inverse, car si $\int_n$ est le terme sommatoire donné, $\int_{n-1}$ sera la somme des $n-1$ premiers termes, et $\int_n - \int_{n-1}$ sera le terme général. Appliquons ceci à des exemples.

* I. Ayant pris la série $1.2.3.4..n$, formons-en une autre qui ait pour terme général le terme sommatoire de la précédente : de sorte que le premier terme soit 1 ; le deuxième $= 1 + 2$ ou 3 ; le troisième $1 + 2 + 3$ ou 6 ; le quatrième $= 6 + 4$ ou 10 ; etc. Le terme sommatoire de la proposée étant $= n.\frac{n+1}{2}$, (142) ; ce sera donc le terme général de notre série $1.3.6.10.15 \ldots n.\frac{n+1}{2}$. Le terme sommatoire de cette série est

$$\tfrac{1}{2}\int_2 + \tfrac{1}{2}\int_1, \text{ ou } n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.$$

* II. Pareillement la série $1.3.6.10\ldots$ forme . . . . . $1.4.10.20\ldots\ n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$: ce terme général équivaut à $\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$; ainsi le terme sommatoire est

$$\tfrac{1}{6}\int_3 + \tfrac{1}{2}\int_2 + \tfrac{1}{3}\int_1, \text{ ou } n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4};$$ *

et ainsi des autres séries semblables.

III. Au lieu de la progression 1.2.3.4...., on auroit pu en employer d'autres pour origine de nos séries successives. C'est ainsi que

1°. 1.3.5.7.... $(2n-1)$ engendre les nombres *carrés* 1.4.9.16... n^2 dont le terme sommatoire est (486)

$$\int_2 = n\,\frac{n+1}{2}.\frac{2n+1}{3}.$$

2°. 1.4.7.10..... $(3n-2)$ donne 1.5.12.22... $\frac{1}{2}n(3n-1)$ (*V.* n°. 142) dont le terme sommatoire est

$$\tfrac{3}{2}\int_2 - \tfrac{1}{2}\int_1, \text{ou } n^2.\frac{n+1}{2}.$$

3°. 1.5.9.13.... $(4n-3)$ donne 1.6.15.... $n(2n-1)$ qui a pour terme sommatoire

$$n.\frac{n+1}{2}.\frac{4n-1}{3}.$$

488. Si on coupe les côtés d'un angle *lam* par des parallèles *bc*, *de*, *fg*..., et que par les points *b*, *d*, *f*..., on mène des parallèles à *am*, on aura 1.3.6.10... pour les nombres de points d'intersection, suivant qu'on bornera le triangle *lam*, à la première, deuxième, troisième,.... parallèle à *lm*. C'est ce qui a fait nommer *Triangulaires* les nombres de cette série. Par une raison semblable, on nomme *Pyramidaux* les nombres 1.4.10.20...; *Carrés*, les nombres 1.4.9.16...; *Pentagones*, les nombres 1.5.12.22....; *Hexagones*, les nombres 1.6.15.28.45. En général, on appelle *Nombres Figurés* ceux qu'on déduit d'une progression par différence, en suivant la loi ci-dessus. 1. *

4. *Extraction des racines*, 4ᵉ., 5ᵉ.... *m*ᵉ.

489. Maintenant qu'on sait former la puissance m d'un binome, il est facile d'appliquer les principes développés pour les racines 2ᵉˢ. et 3ᵉˢ. à celles des autres degrés. Nous nous contenterons d'un seul exemple.

Soit demandée la racine 4ᵉ. de 531441; en désignant par a et b les dixaines et les unités de cette racine, et par A la plus haute 4ᵉ. puissance contenue dans le nombre proposé, ou $(a+b)^4$; on aura $A = a^4 + 4a^3b +$ etc. Le premier terme a^4 étant formé de la 4ᵉ. puissance du chiffre des dixaines, à laquelle on joint 4 zéros; en séparant les 4 chiffres 1441, on voit que 53 contient cette 4ᵉ. puissance. On prouve aisément que 16 étant la 4ᵉ. puissance la plus élevée contenue dans 53, la racine 2 est le chiffre des dixaines.

$$\begin{array}{l} 53.1441 \\ 16 \\ \hline 37.1441 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 27 \\ \hline 32 \end{array} \right.$$

Otant 16 de 53, puis abaissant 1441 près du reste 37, le nombre 371 441 contient $4a^3b +$ etc. Mais $4a^3b$ étant terminé par trois zéros, on séparera les trois chiffres 441, et on en conclura que 371 contient 4 fois le cube du chiffre des dixaines par les unités b, ou $32b$: si donc on divise 371 par 32, le quotient sera b ou $> b$. Ce quotient est 10, mais on ne peut prendre plus de 9, de sorte qu'il s'agit de savoir si la racine est 29, ou < 29. On formera donc 29^4, et comme le résultat excède le nombre proposé; qu'il en est de même de 28^4, on trouvera enfin 27 pour la racine cherchée.

On applique ces principes à tous les degrés.

On extraira aisément la racine proposée, lorsqu'elle aura plus de deux chiffres; ou lorsqu'étant inexacte, on voudra en approcher, ou enfin quand le nombre proposé contiendra une fraction à deux termes, ou décimale.

Il est vrai que le calcul logarithmique abrège beaucoup, et même rend inutiles ceux qu'on vient d'exposer ; mais lorsque les puissances ont des degrés élevés, les nombres excèdent de beaucoup les limites des tables, et on ne peut les employer, lorsqu'on veut des résultats très-approchés. C'est ce qui nous a déterminés à présenter quelques détails à ce sujet.

Nous ne parlerons pas de l'extraction des racines des formules algébriques; ce qu'on en a vu (135) pour le 2e. et le 3e. degré, rend inutiles tous développemens à cet égard, et chacun pourra y suppléer.

490. Nous terminerons ce sujet en exposant un moyen d'avoir les racines m^e. très-approchées, par une voie facile. On partagera le nombre en deux parties, dont l'une a^m soit une puissance m^e. exacte, et la plus grande possible : soit $\pm b$, la différence entre a^m et le nombre proposé, qui sera par conséquent, $= a^m \pm b$; soit $a \pm x$ la racine cherchée : x sera une petite quantité, et on aura $a^m \pm b = (a \pm x)^m$; d'où

$$b = x\,(ma^{m-1} \pm Aa^{m-2}x + Ba^{m-3}x^2 \pm \text{etc.})\,;$$

m, A, B... étant les coefficiens du binome. Mais on peut négliger tous les termes qui accompagnent xma^{m-1}, pour une première approximation, puisque x est très-petit par rapport à a^{m-1} ; d'où

$$x = \frac{b}{ma^{m-1}}:$$

mettant cette valeur pour x, dans les parenthèses, et négligeant $Ba^{m-3}x^2 \pm$ etc., on obtient la valeur beaucoup plus approchée

$$x = \frac{2ab}{2ma^m \pm (m-1)\,b},$$

d'où $\sqrt[m]{(a^m \pm b)} = a \pm \dfrac{2ab}{2ma^m \pm (m-1)\,b}$,

* formule très-simple due à *Harros*. En l'appliquant aux cas de $m = 2$, et $m = 3$, on trouve

$$\sqrt{(a^2 \pm b)} = a \pm \frac{2ab}{4a^2 \pm b},$$

$$\sqrt{(a^3 \pm b)} = a \pm \frac{ab}{3a^3 \pm b};$$

on obtient sur-tout une approximation rapide, en réitérant l'usage de la formule pour approcher de plus en plus, ainsi qu'on l'a vu (485, III). Par exemple, pour obtenir $\sqrt{8}$, comme $a = 2,8$ est près de $\sqrt{8}$; on fera $a^2 = 7,84$ et $b = 0,16$; on en tirera

$$\sqrt{8} = 2,8 + \frac{896}{31520} = 2,82842.$$

Pour approcher davantage, il faudroit de nouveau égaler cette valeur à a, en déduire a^2, puis b, et enfin $\sqrt{8}$.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

1. *Composition des Équations.*

491. LORSQU'ON a transposé tous les termes d'une équation dans un même membre, elle prend, après la réduction, la forme

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + tx + u = 0.$$

Les coefficiens p q..... t u étant connus, et positifs, nuls, ou négatifs. Représentons cette équation par $X = 0$.

On nomme *Racine* toute valeur a qui, mise pour x, rend X nul, ou $a^m + pa^{m-1} + \ldots + u = 0$. Ce nombre a jouit d'une propriété remarquable qui consiste en ce que X est divisible exactement par $x - a$. En effet, quel que soit le nombre a, on peut toujours effectuer cette division, et pousser le calcul jusqu'à ce que x n'entre plus dans le reste R : soit Q le quotient, on a (98)

$$X = Q(x - a) + R.$$

Or, cette équation est du nombre de celles qu'on nomme *Identiques*; les deux membres n'ont d'autre différence que dans la manière dont ils sont exprimés analytiquement ; différence qui s'évanouiroit en effectuant le calcul indiqué. *Les équations identiques subsistent donc quelque valeur qu'on attribue à* x. Faisons ici $x = a$. Le terme $Q(x - a)$ disparoîtra, et il se présentera deux cas :

1°. Si a est racine, en supposant que le reste R existe, comme il ne contient pas x, il n'est point changé par cette supposition, et comme par là X devient nul, il s'ensuit que $R = 0$, c.-à-d. que $X = Q(x - a)$. C'est d'ailleurs ce qui résulte aussi de ce que le reste de la division de X par $x - a$, est $R = a^m + pa^{m-1} +$ etc. *Voyez* page 111, tome 1er.

2°. Si a n'est point racine de $X = 0$, le reste R de la division est ce que devient X, lorsqu'on y change x en a.

Concluons de là que *toute équation* X = 0, *est ou non divisible par* x — a, *suivant que* a *est ou n'est pas racine.*

492. Le quotient Q est du degré $m - 1$; il a la forme $x^{m-1} + p'x^{m-2} +$ etc. : si $x = b$ rend ce polynome nul, on a donc $Q = Q'(x - b)$, d'où. . . $X = Q'(x - a)(x - b)$: alors a et b sont deux racines de la proposée. En continuant, on trouvera. . .

$Q' = Q''(x - c)$; etc..., et comme le degré des polynomes $Q\ Q'\ Q''$... s'abaisse successivement, on arrivera à un polynome du 2e. degré, formé de deux facteurs du 1er. Donc on trouvera au plus m facteurs, et on aura

$$X = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - k).$$

On ne peut d'ailleurs supposer qu'un binome $x - l$, non compris parmi ces m facteurs, divise X; car il devroit aussi diviser $Q(x - a)$, et par conséquent Q, puisqu'il ne peut diviser $x - a$, (102). De même $x - l$ devra diviser Q', puis Q''....; enfin $x - k$, ce qui est absurde.

Donc, 1°. *toute équation du degré* m, *ne peut avoir plus de* m *racines, ou facteurs du premier degré* : a b c... sont d'ailleurs ici réels ou imaginaires. On seroit même certain que le nombre des racines est précisément m, s'il étoit prouvé que tout polynome X est réductible à zéro par une valeur $x = a$, réelle ou imaginaire : nous supposerons ce principe démontré, il fera bientôt le sujet de notre examen (499).

2°. Toute fraction $\frac{X}{Y}$, qui devient $\frac{0}{0}$ lorsqu'on fait... $x = a$, a $(x - a)$ pour facteur de ses deux termes X et Y; $(x - a)$ peut même y être à une puissance quelconque, de sorte que $\frac{X}{Y}$ a une valeur finie, nulle ou infinie, suivant que cette puissance est la même dans X et Y, ou qu'elle est plus grande, ou enfin plus petite dans X que dans Y.

3°. On peut, par la division, abaisser le degré de la proposée, d'autant d'unités qu'on connoît de racines.

4°. La recherche des facteurs du 1er. degré d'un

polynome X revient à celle des racines de l'équation $X = 0$.

5°. Les facteurs du 2e. degré de la proposée sont les produits 2 à 2, de ceux du 1er. degré : ainsi le nombre de ceux-là est $m.\frac{m-1}{2}$. Le moyen le plus simple de les obtenir est de chercher les facteurs du 1er. degré et de les combiner 2 à 2, puisque pour trouver directement l'un de ces facteurs $x^2 + gx + h$, le degré des équations destinées à donner g et h seroit $m.\frac{m-1}{2}$.

6°. Le nombre des facteurs du 3e. degré est . . . . , $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$; et ainsi de suite.

493. Puisque les racines sont les seconds termes des binomes $x - a$, $x - b$, . . . pris en signe contraire, on voit que (97, IV).

1°. p *ou le coefficient du 2e. terme, est la somme des racines prises en signe contraire.*

2°. q *ou le coefficient du 3e. terme, est la somme des produits deux à deux des racines avec leurs signes*, etc.

3°. Enfin *le dernier terme* u *est le produit des racines prises avec leur signe, ou avec un signe contraire, suivant que le degré* m *est pair ou impair.*

Il résulte de là que si le 2e. terme d'une équation manque, la somme des racines est nulle, et si le dernier terme manque, il y a au moins une racine égale à zéro.

494. Si $X = 0$ a une racine de la forme . . . . . . $x = a + b\sqrt{-1}$, la substitution, en réunissant les termes semblables, conduit à un résultat qui a la forme $P + Q\sqrt{-1}$: et comme le nombre réel P ne peut détruire l'imaginaire $Q\sqrt{-1}$, on voit qu'il faut

que les termes réels se détruisent à part : ou $P=0$, $Q=0$. Mais si on fait $x=a-b\sqrt{-1}$, il est évident que la substitution dans X donne $P-Q\sqrt{-1}$; or cette quantité est nulle, à cause de $P=0$, et $Q=0$; donc on satisfait aussi à l'équation $X=0$ par $x=a-b\sqrt{-1}$. Ainsi, *toute équation qui a pour racine $x=a+b\sqrt{-1}$, a aussi $x=a-b\sqrt{-1}$.*

2. Limites des Racines des Équations.

495. Représentons par P la somme des termes positifs, et par N la somme des termes négatifs d'une équation $X=0$; ou $X=P-N$. Faisons x égal à deux nombres p et q, et supposons que les résultats soient de signes contraires : par exemple, soit $P>N$, lorsque $x=p$, et $P<N$ pour $x=q$.

Concevons maintenant qu'on substitue pour x dans X, toutes les valeurs possibles comprises entre p et q ; on doit accorder que P croîtra par degrés insensibles, à mesure qu'on fera croître x, en suivant la loi de continuité : il en sera de même de N. On voit donc que les polynomes P et N passent par toutes les valeurs intermédiaires entre celles qui répondent à $x=p$ et $x=q$; mais P qui d'abord étoit $>N$, est devenu ensuite $<N$; N a donc crû plus rapidement ; d'où il suit que P a dû être au moins une fois $=N$, dans cet intervalle ; alors on a eu $X=0$ (*). Donc, *lorsque deux*

(*) Lagrange, à qui on doit cette démonstration, se sert d'une comparaison qui peint assez bien ce raisonnement. Lorsque deux mobiles parcourent la même ligne, et que celui qui est d'abord en arrière vient à devancer l'autre, on en conclut que celui-ci se meut avec plus de

nombres p *et* q *substitués à* x *dans* X = o *donnent des résultats de signes contraires, il y au moins une racine comprise entre* p *et* q.

Cette démonstration suppose p et q positifs; s'il en étoit autrement, le théorême n'en seroit pas moins vrai. Car faisons $x = y - k$, k étant arbitraire. $X = 0$ deviendra $Y = 0$, l'inconnue étant $y = k + x$. Mais $x = p$ et $x = q$ répondent à $y = k + p$ et $y = k + q$; de sorte que ces nombres substitués dans Y, doivent donner pour résultats les mêmes quantités, que lorsqu'on a mis p et q pour x dans X : ainsi $k + p$ et $k + q$ donnent des résultats de signes contraires. Or, on a pu prendre pour k une valeur, telle que $k + p$ et $k + q$ soient positifs, d'où il suit que $Y = 0$ a une racine comprise entre ces nombres : soit $y = k + \alpha$ cette racine, α sera intermédiaire entre p et q. Mais $x = y - k = \alpha$; donc $X = 0$ a une racine α entre p et q, même lorsque ces deux nombres ne sont pas positifs.

Donc, *dans toute équation qui n'a que des racines imaginaires, on ne peut jamais obtenir que des résultats de même signe;* puisque sans cela, il y auroit une racine réelle comprise entre les nombres substitués. L'article suivant prouve que le signe des résultats est toujours celui du premier terme.

496. La réciproque de ce théorême n'est point toujours vraie; car, mettons en évidence tous les facteurs binomes de X qui correspondent aux racines réelles $a\ b\ c\ldots$,

---

vitesse, et qu'ils ont dû se rencontrer en un point intermédiaire. Il est inutile de dire qu'ici la loi de continuité doit être supposée; car si l'un des mobiles s'élançoit par bonds, il pourroit devancer l'autre sans le rencontrer.

nous aurons $X = X'(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$; $X' = 0$ n'ayant que des racines imaginaires. Cela posé, mettons p et q pour x et divisons les résultats, nous aurons $\frac{P}{Q} \times \frac{p-a}{q-a} \times \frac{p-b}{q-b} \times \frac{p-c}{q-c} \ldots$. P et Q sont les valeurs de X' correspondantes à $x = p$ et $= q$; ces valeurs sont de même signe. Pour qu'une de nos fractions, telle que $\frac{p-a}{q-a}$, soit négative, il faut que $p-a$ et $q-a$ soient de signes contraires, c.-à-d. que a soit entre p et q; il en est de même de $\frac{p-b}{q-b}, \ldots$

Le produit de ces fractions est négatif quand le nombre des facteurs négatifs est impair, c.-à-d., quand il y a un nombre impair de racines comprises entre p et q : alors le numérateur $P(p-a)(p-b)\ldots$ doit être de signe contraire à celui du dénominateur $Q(q-a)(q-b)\ldots$ On verra de même que ces résultats sont de même signe quand le nombre des racines comprises entre p et q est pair. Donc, *il y a un nombre pair ou impair de racines comprises entre* p *et* q, *suivant que les résultats, qu'on obtient en substituant ces nombres pour* x, *sont de même signe ou de signe contraire.*

Il pourroit arriver que plusieurs des facteurs $x-a$, $x-b, \ldots$ fussent égaux entre eux, sans que notre conséquence cessât d'être vraie, pourvu que si a est compris entre p et q, et si on a le facteur $(x-a)^n$, la racine a soit regardée comme comprise n fois entre p et q.

497. *On peut toujours rendre le premier terme d'un polynome,* $x^m + px^{m-1}$, etc. $+ u$, *plus grand que la somme de tous les termes négatifs qu'il renferme.* Car, supposons que kx^{m-n} soit le 1er. des termes négatifs, et

en ait n avant lui; il s'agit de rendre $x^m > kx^{m-n} +$ etc.; or, remplaçons le 2°. membre par un polynome *complet*, dont tous les coefficiens soient égaux au plus grand d'entre eux; soit S ce plus grand coefficient négatif de l'équation: il est clair que si on rend

$$x^m > Sx^{m-n} + Sx^{m-n-1} + Sx^{m-n-2} + \ldots\ldots + S$$

à plus forte raison, on aura $x^m > kx^{m-n} +$ etc.; mais le deuxième membre équivaut à (99)

$$S(x^{m-n} + x^{m-n-1} + \ldots + 1) = S\left(\frac{x^{m-n+1} - 1}{x-1}\right)$$
$$= \frac{S\,x^{m-n+1}}{x-1} - \frac{S}{x-1};$$

on peut même supprimer le dernier terme $\frac{S}{x-1}$, pourvu que x soit > 1; et rendre $x^m > \frac{Sx^{m-n+1}}{x-1}$ ou plutôt $x^{n-1} > \frac{S}{x-1}$.

Comme x doit être > 1, soit $x = \alpha + 1$, il viendra $(\alpha+1)^{n-1} > \frac{S}{\alpha}$; or, cette inégalité sera visiblement satisfaite en posant $\alpha^{n-1} = \frac{S}{\alpha}$, ou $\alpha^n = S$: donc. . . . . $x = 1 + \sqrt[n]{S}$. On rendra donc le premier terme plus grand que la somme des termes négatifs, en prenant pour x cette valeur, ou une quantité plus grande. On en conclut que

1°. Soit $M = 1 + \sqrt[n]{S}$, toute valeur de $x > M$ donnera un résultat positif, et par conséquent ne peut être racine de $x^m + px^{m-1} +$ etc. $= 0$. M est donc *une limite supérieure des racines positives.*

2°. En changeant x en $-x$, c'est-à-dire en prenant

en signe contraire les termes où x est affecté de puissances impaires ou paires, les racines négatives deviennent positives et réciproquement. Dans cette équation, on obtiendra aisément la limite M' des racines positives; par conséquent $-M'$ sera *la limite des racines négatives de la proposée.*

3°. Si on fait $x = 1 + \sqrt[n]{T}$, T étant le plus grand coefficient positif, on rendra x^m plus grand que la somme des termes positifs, et, à plus forte raison, plus grand que la somme des autres termes du polynome, ou. . . $x^m > px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots\ldots + u$.

498. Soit $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots\ldots - u = 0$ une équation dont le dernier terme est négatif.

1°. Si le degré m est *pair*, en faisant $x = 0$ et $x = M$, on obtient deux résultats de signes différens; donc la proposée a une racine positive. Si on change x en $-x$, le premier et le dernier terme ne changeront pas; cette transformée aura par conséquent aussi une racine positive: donc la proposée en a une négative. Ainsi, *toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a deux racines réelles de signes contraires.*

2°. Si m est *impair*, $x = 0$, et $x = M$ donnent encore deux résultats de signes contraires; ce qui annonce une racine positive pour la proposée.

3°. Si le dernier terme u est positif, m étant toujours *impair*, en changeant x en $-x$, le premier terme devient $-x^m$, le dernier demeure $+u$, de sorte qu'en changeant les signes, on a $+x^m + \ldots\ldots - u = 0$. Or, cette équation a une racine positive, donc la proposée en a une négative. En réunissant ce théorème au précédent, on voit que *toute équation de degré impair a une racine réelle de signe contraire à celui de son dernier terme.*

4°. Si une équation de degré pair a une racine réelle a, en la divisant par $x - a$, elle devient de degré impair et doit avoir une autre racine réelle b; ce qui prouve que *dans toute équation de degré pair, les racines réelles (et par conséquent aussi les imaginaires) sont en nombre pair. Si le degré est impair, les racines réelles sont en nombre impair, mais les imaginaires sont encore en nombre pair.*

499. Les équations de degré pair dont le dernier terme est positif, sont donc les seules pour lesquelles l'existence d'une racine réelle soit douteuse ; car, en y appliquant les raisonnemens ci-dessus, on ne peut, en général, obtenir des résultats de signes contraires. Mais si on change le signe de ce dernier terme u, on a une nouvelle équation qui a une racine réelle dont la valeur est liée à celle des coefficiens (*) $p\ q \ldots\ldots u$. Désignons cette racine par $x = f(p,\ q,\ \ldots\ldots u)$. L'esprit du calcul algébrique, qui est indépendant des valeurs particulières qu'on peut donner aux quantités, prouve que si on change le signe de u

(*) Lorsqu'une formule exprime la valeur d'une inconnue x, et est composée de diverses quantités $p, q\ldots$ on exprime cette dépendance en disant que x est *Fonction* de $p, q\ldots$ ce que nous représenterons par

$$x = f(p, q\ldots),\ \text{ou}\ x = F(p, q\ldots),\ \text{etc.},$$

on reconnoît cette dépendance en ce que x varie avec les quantités $p, q\ldots$ en sorte qu'on doit affirmer que la formule destinée à faire connoître x devra nécessairement contenir $p, q\ldots$ On distingue plusieurs sortes de fonctions ; les *Implicites* sont celles où les quantités sont mêlées les unes aux autres dans l'équation qui les lie : $x^2 - 2xy + 1 = 0$ est une fonction implicite de x et y ; mais si on résout l'équation, on a $x = y + \sqrt{(y^2 - 1)}$, et x est fonction *Explicite* de y. Les fonctions *Transcendantes* sont celles qui renferment des sinus, cosinus, arcs de cercle, logarithmes ou des *Exponentielles*, telles que a^x. Les autres fonctions sont *Algébriques* ; elles ne comprennent que les opérations usitées dans l'algèbre élémentaire.

dans cette formule, $x = f(p,\ q, \ldots\ldots -u)$ satisfera à la proposée.

Mais par le changement de signe de u, cette racine pourra cesser d'être réelle ; elle deviendroit simplement alors une expression analytique, un symbole, qui jouiroit de la propriété de rendre nul le polynome donné. Il est donc vrai de dire que toute équation est satisfaite par une valeur a, réelle ou imaginaire; par conséquent, la décomposition en m facteurs binomes, est légitime. Au reste, *voyez* n°. 519.

500. On peut, à l'aide des courbes, démontrer ces théorêmes d'une manière facile. La courbe dont l'équa-
2. tion est $y = X$ est formée *d'une seule branche continue et indéfinie* de part et d'autre $Q'P'CEGI\ldots\ldots$, puisque chaque valeur de x ne répond qu'à une valeur unique et réelle de y. Son cours a donc la forme qu'on voit fig. 2, et les abscisses des points P, Q,... d'intersection avec l'axe Ax, sont les racines réelles de $X = 0$; les racines positives sont AP, AQ;..... les négatives sont AP', AQ'..... (la courbe toucheroit l'axe Ax, s'il y avoit des facteurs binomes égaux et réels).

Cela posé, 1°. si $x = AB$ et $x = AD$ donnent des résultats de signes contraires, les ordonnées correspondantes BC DE seront, l'une positive, l'autre négative ; la courbe étant *continue* de C en E rencontre l'axe Ax, au moins en un point entre B et D : la même chose a lieu pour $x = AB$ et $x = AH$, mais il y a trois points d'intersection, etc. Si $x = AB$ et $x = AF$ donnent des résultats de même signe, le nombre des intersections est nul ou pair, car la courbe peut aller directement de C en G, ou couper l'axe : le nombre des points d'intersection est donc 0, 2, 4, ... Ceci s'accorde avec le n°. 496.

3. 2°. Si $X = 0$ est de degré pair, et si le dernier terme

est négatif, $x = o$ donne l'ordonnée négative AF, 3.
$x = AB =$ la limite M des racines positives, et $x = AD =$ la limite M' des racines négatives, donnent les ordonnées positives BC DE. Ainsi il y a au moins un point d'intersection entre A et B, et un autre entre A et D. *Voyez* le théorème 498, 1°,

3°. Si $X = o$ est de degré impair, et que le dernier terme 4.
soit négatif, en faisant $x = o$, et $x = AB =$ la limite des racines positives, on a des ordonnées AF et BC de signe contraire; ainsi il y a un point d'intersection, au moins, entre A et B. C'est la proposition 498, 2°.

4°. Si $X = o$ est de degré impair et si le dernier terme 5.
est positif, $x = o$ et $x = AB =$ la limite des racines négatives, donnent les ordonnées AF et BC, et par conséquent, il y a au moins un point d'intersection entre A et B.

3. *Transformation des Équations.*

501. Soit $kx^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + tx + u = o$, une équation donnée, que nous désignerons par $X = o$: composons une autre équation dont les racines aient, avec celles de la proposée, une relation déterminée.

Si on veut, par exemple, former une équation dont les racines soient égales à celles de $X = o$, chacune diminue de a, on posera $y = x - a$, d'où $x = a + y$. Il ne s'agira plus que de substituer, et on aura

$$k(a+y)^m + p(a+y)^{m-1} + q(a+y)^{m-2} \dots + t(a+y) + u = o.$$

Sans nous arrêter à développer les puissances m, $m-1\dots$, du binome $a + y$, il est aisé de voir qu'en ordonnant relativement aux puissances croissantes de y, la transformée sera de la forme

$$U + Ty + Vy^2 + Sy^3 + \ldots + ky^m = 0 :$$

U étant la somme des 1ers. termes, Ty, Sy^2..... celles des 2es., 3es... termes des développemens. Or, la formule de Newton (481) prouve que 1°. U est le polynome proposé, ou X, dans lequel x est remplacé par a : 2°. T se déduit de U en multipliant chaque terme par l'exposant de a, et diminuant cet exposant de 1. Nous exprimerons ce genre de calcul en disant que T est le *polynome* ou la *fonction dérivée* de U : 3°. V est de même la dérivée de T, mais divisée par 2 : 4°. S est la dérivée de V, divisée par 3, etc. Il est donc facile de composer chaque terme de la transformée, et on a

$$U = ka^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} + \ldots + ta + u$$
$$T = mka^{m-1} + (m-1)pa^{m-2} + (m-2)qa^{m-3} + \ldots + t$$
$$2V = m(m-1)ka^{m-2} + (m-1)(m-2)pa^{m-3} + (m-2)(m-3)qa^{m-4} + \ldots$$
$$2.3S = m(m-1)(m-2)ka^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3)pa^{m-4} + \ldots$$
etc.....

Ces calculs nous seront utiles par la suite. Il seroit aisé de trouver de même la transformée de $x = y - a$.

502. Cette transformation $x = a + y$, conduit au théorème qui apprend à faire évanouir un terme d'une équation : en effet, si on fait $x = y + a$, en ordonnant la transformée par rapport aux puissances décroissantes des y on a

$$\left.\begin{array}{l|l|l} ky^m + mak & y^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)a^2k & y^{m-2} + \text{etc.} + ka^m \\ \quad + \; p & \quad + \quad (m-1)a\,p & \quad + \text{etc.} + pa^{m-1} \\ & \quad + \quad\quad\quad\quad q & \quad + \text{etc.} + qa^{m-2} \\ & & \quad + \text{etc.}\ldots.. \end{array}\right\} = 0.$$

Or a étant arbitraire, on peut disposer de sa valeur, de manière à faire évanouir un des termes : si on veut que la transformée soit privée du second terme, on posera. . . ,

$$mak + p = 0, \text{ d'où } a = -\frac{p}{mk} \text{ et } x = y - \frac{p}{mk}.$$

On voit donc que, *pour faire disparoître le second terme de l'équation, il faut changer* x *en une nouvelle inconnue* y, *dont on retranche le coefficient du second terme, divisé par celui du premier et par le degré de l'équation.* Il est inutile d'avertir que dans cette soustraction, on doit avoir égard aux signes des coefficiens p et k.

Soit, par exemple, $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$, on fera $x = y + \frac{6}{3} = y + 2$, et on aura $y^3 - 8y - 15 = 0$, transformée privée de 2e. terme. De même $3x^4 + 6x^3 - 8 = 0$, en faisant $x = y - \frac{1}{2}$, devient $3y^4 - \frac{9}{2}y^2 + 3y - \frac{67}{8} = 0$.

On peut même employer ce calcul à la résolution de l'équation $x^2 + px = q$; car faisant $x = y - \frac{1}{2}p$, on a $(x + \frac{1}{2}p)^2 = y^2$ d'où $x^2 + px = y^2 - \frac{1}{4}p^2 = q$: ainsi, $y = \pm\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$. donc $x = -\frac{1}{2}p \pm (q + \frac{1}{4}p^2)$.

Lorsqu'une équation est ainsi privée de son second terme, la somme des racines est nulle (493); notre transformation revient donc à augmenter (ou diminuer) chaque racine de la proposée d'un même nombre, tel que cette condition soit remplie.

Pour chasser le troisième terme, on feroit

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)ka^2 + (m-1)ap + q = 0.$$

La valeur de a seroit double; mais comme on peut trouver des radicaux, ou même des imaginaires, on use rarement de ce calcul.

Pour faire évanouir le dernier terme, il faudroit résoudre $ka^m + pa^{m-1} + \ldots\ldots + ta + u = 0$, ce qui revient à la proposée, ainsi qu'on devoit s'y attendre, puisque la transformée auroit 0 pour l'une de ses racines, d'où $x = a$.

503. Pour rendre les racines de la transformée k fois

plus grandes que celles de la proposée, on fera $y = hx$; d'où $x = \frac{y}{h}$; substituant dans $kx^m + px^{m-1} + \text{etc.} = 0$, on a

$$\frac{ky^m}{h^m} + \frac{py^{m-1}}{h^{m-1}} + \frac{qy^{m-2}}{h^{m-2}} + \text{etc.} + \frac{ty}{h} + u = 0,$$

et multipliant tout par h^{m-1}, on trouve

$$\frac{ky^m}{h} + py^{m-1} + qhy^{m-2} + \ldots th^{m-2}y + uh^{m-1} = 0.$$

Ce calcul est sur-tout employé lorsqu'une équation a des coefficiens fractionnaires, et qu'on veut l'en délivrer, ainsi que du coefficient du premier terme; car, en la réduisant au même dénominateur, ces coefficiens deviennent des nombres entiers $k\,p\,q\ldots$, effectuant cette transformation, et posant l'indéterminée $h = k$, on voit que l'équation devient $y^m + phy^{m-1} + \text{etc.} + uh^{m-1} = 0$. Ainsi, *pour délivrer une équation de ses coefficiens fractionnaires, on la réduit au même dénominateur, et on chasse ensuite le coefficient du premier terme, en remplaçant* x *par une nouvelle inconnue* y *divisée par ce coefficient.*

Par exemple, $x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} = 0$ devient $12x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 9x - 42 = 0$; et faisant $x = \frac{y}{12}$, il vient $y^4 - 8y^3 + 120y^2 - 1296y - 72576 = 0$.

Il sera aisé de voir qu'en faisant $x = \frac{y-p}{mk}$, dans $kx^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots\ldots + u = 0$, on chassera à la fois le second terme et les coefficiens fractionnaires; $k\,p\,q\ldots u$ sont ici supposés entiers.

Si au contraire on fait $x = hy$, on rendra les racines h fois plus petites : on emploie cette transformation, lorsque la proposée a de grands coefficiens, afin de les réduire à de

plus petits nombres. C'est ainsi qu'en supposant $x = 3y$, dans $x^3 - 63x + 189 = 0$, on trouve $y^3 - 7y + 7 = 0$.

504. En faisant $x = \frac{1}{y}$ dans la proposée, les plus grandes racines de x, sont les plus petites de y; on emploie ce calcul à la recherche de la limite inférieure des racines positives et négatives des équations.

Soit, par exemple, $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$; on trouve $\frac{1}{y^4} - \frac{3}{y^3} - \frac{5}{y^2} + \frac{2}{y} + 3 = 0$, d'où $y^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{5}{3}y^2 - y + \frac{1}{3} = 0$. Or, la limite des racines positives (497) est, $1 + \sqrt{\frac{5}{3}}$ ou $y < \frac{7}{3}$ on peut même réduire cette limite à $\frac{6}{3}$ ou 2, en observant que $y = 2$, rend $y^4 > \frac{5}{3}y^2 + y$. On a donc $y < 2$, et par conséquent $x > \frac{1}{2}$: et comme d'ailleurs on a $x < 5$, toutes les racines positives sont comprises entre $\frac{1}{2}$ et 5. On verra que les négatives sont entre -2 et -2; c.-à-d., que la proposée n'a point de racines négatives.

505. En général, pour trouver une transformée dont les racines aient avec celles de la proposée une relation donnée; on exprimera cette relation par une équation entre x et y, et il ne s'agira plus que d'éliminer x entre cette équation et la proposée. Il convient donc avant tout de donner les moyens d'effectuer ces calculs.

4. *De l'Élimination.*

506. Etant donnés deux polynomes Z et T, fonctions de x et y, (499); cherchons tous les couples de valeurs qui substituées pour ces inconnues, donnent $Z = 0$, $T = 0$. Pour cela, ordonnons par rapport à l'une d'elles, x par exemple, et divisons T par Z. (Nous supposons ici que le degré de x est moindre dans Z que dans T, ou qu'il

est le même dans ces polynomes) soit Q le quotient et R le reste, nous aurons

$$T = QZ + R.$$

Or les valeurs cherchées donnent $T = 0$ et $Z = 0$; ainsi, on a $R = 0$: de même toutes celles qui rendent $R = 0$ et $Z = 0$, donnent aussi $T = 0$; d'où il suit que les équations $Z = 0$ et $R = 0$ sont satisfaites par les valeurs cherchées, qui seules jouissent de cette propriété. Comme on a pu pousser la division de T par Z, jusqu'à ce que le degré de x soit moindre dans R que dans Z, on voit que la question est simplifiée, puisqu'elle se réduit à résoudre $Z = 0$ et $R = 0$.

Mais on peut raisonner de même pour Z et R; ainsi on divisera Z par R, puis R par le nouveau reste, et ainsi de suite comme dans la méthode du commun diviseur (103), excepté qu'ici il n'est point nécessaire que chaque quotient soit entier. On parviendra bientôt à un reste indépendant de x; soit Y ce reste et D le diviseur de cette opération : D est fonction de x et de y, Y l'est de y seul. Il suit de ce qui vient d'être dit que les valeurs de x et de y cherchées sont les racines de

$$Y = 0, \quad D = 0.$$

La question est ainsi réduite à la résolution des équations à une seule inconnue : après avoir trouvé, par les procédés développés ci-après, les racines de *l'équation finale en* y, $Y = 0$, on substituera chacune d'elles dans $D = 0$, et on en tirera les valeurs correspondantes de x; de sorte que suivant que D sera du 1er., 2e., 3e....... degré en x, chaque valeur de y répondra à 1, 2, 3..... valeurs de x.

Soient par exemple $x^3 - x^2(y+2) + 5xy + 3(1-2y) = 0$

et $x^2 - x(y+2) + 2y = 0$: une 1re. division donne x pour quotient et $3xy + 3(1-2y)$ pour reste ; une 2e. donne le quotient $\frac{x}{3y} - \frac{y^2+1}{3y^2}$, et le reste. . . . . $2y - \frac{1+y^2}{y^2}(2y-1)$. Egalant à zéro le diviseur et ce reste indépendant de x, on a en réduisant, $y^2-2y+1=0$, $x = \frac{2y-1}{y}$: celle-là donne $y=1$, d'où $x=1$, solution unique.

De même $x^2 - 3xy + y^2 + 5 = 0$ et $2x^2 - y^2 + 1 = 0$, donnent d'abord le quotient $\frac{1}{2}$ et le reste $-3xy + \frac{3}{2}(y^2+3)$; ensuite le quotient $-\frac{2x}{3y} - \frac{y^2+3}{3y^2}$ et le reste. . . . $1 - y^2 + \frac{(y^2+3)^2}{2y^2}$; d'où $y^4 - 8y^2 = 9$ et $x = \frac{y^2+3}{2y}$. En faisant $y^2 = z$, on trouve $z=9$ et $z=-1$; donc $y = \pm 3$ et $y = \pm\sqrt{-1}$; et par suite $x = \pm 2$ et $x = \mp\sqrt{-1}$; ce qui fait quatre solutions.

507. On remarquera que 1°. il faut ordonner de préférence relativement à celle des inconnues qui présente plus de facilité pour le calcul.

2°. En multipliant $T = QZ + R$ par un nombre quelconque a, on a $aT = aQZ + aR$; or $T=0$ et $Z=0$ ont encore les mêmes racines que $Z=0$ et $R=0$, et réciproquement. On pourroit en dire autant des opérations subséquentes. Ainsi on peut introduire dans ces calculs, afin de les faciliter, ou en supprimer, tels facteurs *numériques* qu'on voudra, sans changer les racines de l'équation finale en y.

3°. Si l'une des racines de $T=0$ $Z=0$ rendoit Q infini, on ne pourroit plus en conclure $R=0$, puisque QZ pourroit n'être pas nul (492, 2°.). Alors $Z=0$ et $R=0$,

n'auroient point pour racines ces valeurs de x et y; on doit en dire autant des quotiens subséquens. On voit d'ailleurs que Q n'est infini que pour les valeurs de y, qui rendent nul son dénominateur, lequel est le coefficient de la plus haute puissance de x dans Z.

Il sera donc convenable d'essayer si en égalant à zéro chaque coefficient du premier terme des diviseurs, les valeurs de y qu'on en tire sont racines de $T=0$ et $Z=0$. Pour cela, on y substituera chacune de ces racines, et comme les équations en x qui en résultent $T'=0$ $Z'=0$, devront avoir au moins une racine commune, T' et Z' auront un commun diviseur (491) fonction de x, qui égalé à zéro donnera les valeurs de x qui répondent à celles de y qui rendent Q infini.

Au reste, le cas actuel ne pourra avoir lieu, si on a soin de préparer chaque polynome, de manière que les quotiens soient entiers, absolument comme dans la méthode du commun diviseur. Il est vrai qu'on sera forcé d'introduire des facteurs fonction de y, et qu'il pourra en résulter des racines de y étrangères à la question.

4°. Si l'une des équations est décomposable en deux facteurs, alors on prendra chacun d'eux tour-à-tour, et on éliminera avec l'autre équation, ce qui facilitera les calculs.

Ainsi $x^3(y-2)-(y+3)^2(y-2)=0$ et $x^2-x(y+3)=0$, ont pour facteurs, l'une $y-2$, l'autre x : on fera donc $y=2$ dans la 2e., et on en tirera $x=0$ et $x=5$: ensuite $x=0$ dans la 1re., d'où $y=-3$ et $y=2$. Puis ôtant les facteurs $y-2$ et x, il vient $x^3-(y+3)^2=0$ et $x-(y+3)=0$; on traite ces équations à part. On a donc quatre solutions $x=0$ et $y=2$; $x=5$ et $y=2$; $x=0$ et $y=-3$; $x=1$ et $y=-2$.

508. La règle donnée en général pour éliminer entre $Z=0$ et $T=0$ souffre trois exceptions.

1°. Lorsqu'en faisant le calcul, le dernier reste Y s'évanouit par la réduction des termes semblables : alors Z et T ont un facteur commun F, et sont de la forme $FZ=0$ $FT=0$. Or l'équation $F=0$ satisfait à elle seule à la question, ainsi *le problème est indéterminé*, puisqu'on n'a qu'une équation pour trouver deux inconnues. Outre le nombre infini de solutions données par $F=0$, on a encore celles que fournissent $T=0$ et $Z=0$: mais la méthode générale s'applique à ces équations.

Si F contient l'une des inconnues seulement, $F=0$ en détermine les valeurs ; l'autre inconnue est arbitraire. Si F est fonction de x et de y, on prend pour l'une des inconnues telle valeur qu'on veut, $F=0$ détermine l'autre.

Soit $(y-4)(x^2-1)=0$ et $x^3-x^2-xy+y=0$: on verra aisément que $x-1$ est facteur commun : en le supprimant, on a $(x+1)(y-4)=0$ et $x^2-y=0$. Ces deux équations donnent $y=1$ et $x=-1$; puis $y=4$ et $x=\pm 2$. Mais outre ces trois solutions il y en a une infinité d'autres données par $x-1=0$; de sorte que y est alors un nombre quelconque et $x=1$.

2°. Quand le reste Y est une valeur numérique, on ne peut poser $Y=0$: alors l'équation fournie par la dernière division étant $V=DQ'+Y$, comme V et D ne peuvent être nuls à moins que Y ne le soit, ce qui est impossible ici, on voit que les équations proposées renferment des conditions contradictoires, et *la question est absurde*. C'est ce qui a lieu pour $x^2y-y^2+1=0$, $x^2y-y^2+4=0$.

3°. Lorsque quelqu'une des valeurs de y, tirées de $Y=0$, rend D nul, par l'effet de la réduction des termes semblables; alors il faut faire cette substitution dans le diviseur précédent V, et égaler à zéro; car $V=DQ'+Y$ se réduit

alors à $V = 0$. De même, si V est rendu nul, on devra recourir au diviseur précédent, etc.

Le cas dont il s'agit ici a lieu lorsque quelqu'une des racines de y, correspond à un plus grand nombre de valeurs de x, que les autres racines; car x est à un degré plus élevé dans V que dans D; et le nombre des valeurs de x, correspondantes à chaque racine de y, dépend du degré du diviseur qui les donne.

Soit, par exemple, $x^2 + x(y-3) + (y-1)(y-2) = 0$ et $x^2 - 2x + y(y-1) = 0$: on a pour dernier diviseur $(x-2)(y-1) = 0$, et pour reste $y(y-1) = 0$. Or $y = 0$, donne $x = 2$; mais $y = 1$ fait évanouir le diviseur : on doit donc recourir au diviseur précédent, qui est du 2e. degré la seconde des équations données ; on en tire $x = 0$ et $x = 2$, pour $y = 1$.

Lorsqu'on est forcé de remonter ainsi jusqu'au premier diviseur Z, comme $y = a$ rend $Z = 0$, $y - a$ est facteur de Z, et on sait alors ce qu'il faut faire (507, 4°.) : et même si T étoit aussi rendu nul, $y - a$ seroit facteur commun de T et Z, et le problême seroit indéterminé (1°.).

Au reste, ce cas ne se rencontrera jamais, si on a la précaution d'examiner chacun des diviseurs successifs, et de voir si les termes ont un facteur commun en y; car on peut traiter ce facteur à part (507, 4°.). Ainsi, dans l'exemple précédent, après avoir reconnu $y - 1$ pour facteur du dernier diviseur, on fera $y = 1$ dans le dividende, et on en tirera $x = 0$ et $x = 2$: outre cette double solution, on trouvera les autres en supprimant le facteur $y - 1$, dans le dernier diviseur, ce qui le réduit à $x - 2$: ainsi $x = 2$ donne $y = 0$ et $y = 1$.

509. La recherche des points d'intersection de deux courbes dépend de l'élimination ; les valeurs des coor-

données x et y de ces points sont les racines des équations de ces courbes : on peut donc les obtenir en construisant les courbes et cherchant les points communs.

Si l'une des équations est décomposable en deux facteurs rationnels, chacun de ces facteurs représente une courbe particulière, qu'on doit construire à part. Ceci s'accorde très-bien avec ce qu'on a vu (507, 4°.).

En appliquant ces principes généraux aux équations $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, on trouve aisément pour équation finale $(a'b - ab')y + a'c - ac' = 0$; on en tire $y = \frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}$, $x = \frac{b'c - bc'}{a'b - ab'}$. Cependant si le reste étoit nul de lui-même, c'est-à-dire si on avoit $a'b = ab'$ et $a'c = ac'$, le problème seroit indéterminé : il seroit absurde si le reste étoit une valeur numérique, et alors on auroit $a'b = ab'$. Tout cela est conforme à ce qu'on connoît (115).

Pour les équations de la forme $x^2 + Px + Q = 0$ et $x^2 + P'x + Q' = 0$, on obtient aisément l'équation finale

$$(Q - Q')^2 + Q'(P - P')^2 - P'(P - P')(Q - Q') = 0 :$$

ici $P\ Q\ P'Q'$ sont des fonctions de y. On trouve sans difficulté les cas où le problème est absurde ou indéterminé.

Voici quelques autres exemples auxquels on fera bien de s'exercer.

1°... $x^2 - y^2 - 3 = 0$, et $2x + y - 5 = 0$.
2°... $xy^2 - y^2 - xy + y = 0$, $yx^2 - 2xy + y = 0$.
3°... $x^2 - xy + 1 = 0$, $x - 4xy + 7 = 0$.
4°... $x^2y^2 + x - 2 = 0$, $x^2y - x(y+1) + 2 = 0$.
5°... $x^3 - 4x^2y + 8 = 0$, $x^2y - xy^2 - 2 = 0$.
6°... $x^2 + 2xy - 3y^2 + 2 = 0$, $x^2 - y^2 + 1 = 0$.

Consultez à ce sujet le n°. (541, V).

5. *Des Racines égales.*

510. Soit $x^m + px^{m-1} + \ldots + tx + u = 0$, une équation donnée, lorsque, parmi les facteurs binomes qui la composent, il en est d'égaux, elle prend la forme.

$$X = (x-a)^n (x-b)^p \ldots (x-c)(x-d) \ldots = 0. \quad (1)$$

On dit alors qu'elle a n racines $= a$, p racines $= b, \ldots$ il s'agit de déterminer la valeur et le nombre de chacune de ces racines.

Le produit des racines $a\,b\,c\,d \ldots$ supposées inégales est $= u$; t est la somme de leurs produits $m-1$ à $m-1$ ou $t = bcd\ldots + acd\ldots + abc\ldots +$ etc. : or chaque terme de t est le produit de toutes les racines, l'une exceptée; de sorte que si les nombres $a\,b\,c\ldots$ sont inégaux et premiers entre eux, les termes de t ne peuvent avoir aucun facteur commun. Mais s'il y a n racines $= a$, p racines $= b, \ldots a^{n-1}, b^{n-1}, \ldots$ sont facteurs communs de tous les termes de t, et de plus sont les seuls, si $a, b, c \ldots$ sont *premiers entre eux*. Ainsi dans ce cas, comme $u = a^n b^p \ldots cd \ldots$; t et u n'ont pour facteur commun que $a^{p-1}\,b^{n-1}\ldots$, ou *le produit des racines égales, chacune prise une fois de moins.*

Soit, d'après cela $x = x' - y$, x' étant un nombre arbitraire et y une nouvelle inconnue : comme $y = x' - x$, les racines de la transformée seront $y = x' - a$, $x' - b$, $x' - c, \ldots$ qui sont visiblement premières entre elles (103), quels que soient $a\,b\,c\ldots$, tant que x' reste indéterminé. Si la proposée a des racines égales, les valeurs de y, seront $(x'-a)^n, (x'-b)^p \ldots x'-c, x'-d, \ldots$ où $x'-a, x'-b\ldots$ sont encore premiers entre eux.

La transformée aura la forme $U + Ty + Vy^2 + \ldots + y^m = 0$, $U, T\ldots$ étant des polynomes connus en x', (501). La con-

séquence démontrée ci-dessus est applicable à cette transformée dont les racines sont premières entre elles : on voit que si U et T n'ont pas de facteur commun, y n'aura que des racines inégales $x' - a$, $x' - b$,.... ainsi $a\ b\ c$.... seront des nombres différens, et $X = 0$ n'aura pas de racines égales.

Mais si U et T ont un facteur commun F, il sera de la forme $F = (x' - a)^{n-1} \times (x' - b)^{p-1} \times$ .... ce qui exige que la proposée ait n racines $= a$, p racines $= b$,... Pour trouver F, on formera donc U et T, et on en tirera leur plus grand commun diviseur. En supprimant les accens de x', qui maintenant sont superflus, on aura

$$U = x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + tx + u$$
$$T = mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + (m-2)qx^{m-3} + \ldots + t$$
$$F = (x-a)^{n-1} \times (x-b)^{p-1} \times \ldots$$

Il ne s'agit plus que de savoir mettre ce facteur F sous la forme que nous lui donnons ici, et le problème sera résolu. Cette question est précisément la même que celle qu'on veut résoudre pour X, seulement elle est beaucoup plus simple, parce que le degré de F est nécessairement moindre que celui de X.

511. Nous supposerons ici qu'on sache résoudre toute équation qui n'a que des racines inégales ; ce sera le sujet des théories subséquentes. Voici le procédé que m'a communiqué M. Binet aîné, professeur au lycée de Rennes, pour employer les principes précédens à la recherche des racines égales d'une équation $X = 0$.

Soient X' le produit des facteurs simples de X, X''^2 celui des facteurs qui sont au carré, X'''^3 ceux qui sont au cube, etc. ; on aura

$$X = X'X''^2X'''^3X^{\text{iv}4}\ldots \quad F = X''X'''^2X^{\text{iv}3}\ldots$$

Si on divise X par F, le quotient Q sera exact, et

$$\frac{X}{F} = Q = X'X''X'''X^{\text{iv}} \ldots$$

qui est le produit de tous les facteurs de X, mais à la 1re. puissance seulement : or le plus grand commun diviseur F' entre Q et F est visiblement

$$F' = X''X'''X^{\text{iv}} \ldots \text{ d'où } \frac{Q}{F'} = X'.$$

Ce calcul donne X', et par conséquent en résolvant $X' = 0$, on obtient toutes les racines simples de la proposée $X = 0$: et si celle-ci n'avoit que des racines multiples, X' seroit $= 1$, et on auroit $Q = F'$.

Cette 1re. opération faite, reprenons les deux polynomes connus F et F', leur quotient Q' est

$$\frac{F}{F'} = Q' = X'''X^{\text{iv}\,2}X^{\text{v}\,3} \ldots$$

cherchons le commun diviseur F'' entre F' et Q', il sera

$$F'' = X'''X^{\text{iv}}X^{\text{v}} \ldots \text{ d'où } \frac{F'}{F''} = X'';$$

l'équation $X'' = 0$ qu'on forme avec ce quotient, n'a que des racines inégales qui sont les racines doubles de $X = 0$; et si la proposée n'en a point de telles, on aura $F' = F''$.

Il sera facile de continuer le calcul; car

$$\frac{Q'}{F''} = Q'' = X^{\text{iv}}X^{\text{v}\,2}X^{\text{vi}\,3} \ldots$$

et le commun diviseur F''' entre F'' et Q'' est

$$F''' = X^{\text{iv}}X^{\text{v}}X^{\text{vi}} \ldots, \text{ d'où } \frac{F''}{F'''} = X'''.$$

On voit donc que la proposée sera partagée ainsi, en autant d'autres équations $X'=0$, $X''=0$, $X'''=0$,... qui donneront respectivement les racines simples, doubles, triples, ... de $X=0$. Du reste, le degré s'abaisse rapidement par ces calculs, et la recherche du polynome F est réellement la seule partie longue de l'opération.

Par exemple, pour
$X=x^6+4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9=0$,
on cherche le commun diviseur F entre X et son dérivé $6x^5+20x^4-12x^3-48x^2+22x+12$:

on a, $F=x^3+x^2-5x+3$;

d'où on tire $\frac{X}{F}=Q=x^3+3x^2-x-3$.

Le plus grand commun diviseur entre F et Q est $F'=x^2+2x-3$; ainsi le quotient de $\frac{Q}{F'}$, est $x+1$: on n'a donc qu'un facteur simple $=x+1$.

De plus $\frac{F}{F'}=Q'=x-1$, et le plus grand commun diviseur entre F' et Q' est $F''=x-1$; donc $Q'=F''$ et $\frac{F'}{F''}=x+3$. Ainsi l'opération est terminée, X a pour facteurs $(x+1)$ par le carré de $x+3$, et le cube de $x-1$, ou $X=(x+1)(x+3)^2(x-1)^3$.

Prenons encore
$x^8-12x^7+53x^6-92x^5-9x^4+212x^3-153x^2-108x+108=0$.

On en tire successivement

$$F=x^4-7x^3+13x^2+3x-18,$$

$$\frac{X}{F}=Q=x^4-5x^3+5x^2+5x-6.$$

$$F'=x^3-4x^2+x+6,\quad \frac{Q}{F'}=X'=x-1.$$

$\frac{F}{F'} = Q' = x - 3,\ X'' = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$

$F'' = x - 3,\quad X''' = Q' = x - 3,\quad F''' = Q'' = 1.$

donc. . . . $X = (x - 1)(x + 1)^2 (x - 2)^2 (x - 3)^3.$

On verra aussi que

$x^8 - \frac{5}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{33}{16}x^4 - \frac{7}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{16} = 0,$

est équivalent a $(x - 1)(x + 1)^3 (x - \frac{1}{2})^4 = 0.$

De même $x^6 - 2x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x + 8$ est $= (x^2 + 2)^2 (x^2 - 2x + 2).$

6. *Racines Commensurables.*

512. Supposons que les coefficiens de l'équation

$$kx^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

sont entiers ; soit a une racine entière, c.-à-d. que $ka^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0$: on en tire

$$\frac{s}{a} = S = -r - qa - pa^2 - ka^3 \text{. . . . } (1).$$

Le 2e. membre étant entier, le quotient S ou $\frac{s}{a}$ doit aussi l'être. Il suit de là que les racines entières de la proposée sont toutes comprises parmi les diviseurs du dernier terme s. On pourroit donc chercher ces diviseurs, et essayer, par la substitution, s'ils satisfont à la proposée. Mais le nombre des diviseurs de s pouvant être très-grand, on remarque, qu'en changeant r de membre, et divisant par a, on a

$$\frac{S + r}{a} = R = -q - pa - ka^2 \text{. . . . . } (2);$$

en sorte que $S + r$ doit aussi être divisible par a. On

ne devra donc essayer que ceux des diviseurs de s qui donnent pour le nombre $S+r$ un multiple de a. On voit de même que

$$\frac{R+q}{a}=Q=-p-ka\ldots\ldots(3);$$

c.-à-d. que $R+q$ est encore divisible par a. Enfin

$$\frac{Q+p}{a}=P=-k,\text{ d'où } P+k=0\ldots(4).$$

Ce calcul sert encore à réduire la multitude des nombres à éprouver, ou plutôt donne les racines entières ; car il faudroit prendre ceux des diviseurs de s qui rendent R, Q, P entiers, et de plus qui donnent $P+k=0$, et les substituer dans la proposée pour reconnoître s'ils y satisfont. Mais cette dernière épreuve est inutile, et ces diviseurs sont nécessairement des racines. En effet, de $P+k=0$, en mettant pour P sa valeur $\frac{Q+p}{a}$, on en tire $Q=-p-ka$. De cette équation (3), on remonte par le même procédé à (2), puis à (1), d'où $ka^4+pa^3+qa^2+ra+s=0$, ce qui prouve que tout nombre a, qui satisfait à ces diverses conditions est nécessairement racine.

En rapprochant les équations ci-dessus

$$\frac{s}{a}=S,\frac{S+r}{a}=R,\frac{R+q}{a}=Q,\frac{Q+p}{a}=P,P+k=0,$$

et observant que nos raisonnemens sont indépendans du degré de l'équation proposée, il en résulte qu'on reconnoît qu'un nombre a est racine d'une équation, lorsque

1°. *Le dernier terme divisé par* a *donne un quotient exact.*

2°. *Il en est de même de ce quotient augmenté du*

Cherchons, par exemple, un nombre de trois chiffres, tel que 1°. leur produit soit 54; 2°. le chiffre du milieu soit le 6ᵉ. de la somme des deux autres; 3°. enfin, en soustrayant 594 du nombre dont il s'agit, le reste soit exprimé par les mêmes chiffres, mais écrits dans un ordre inverse. En désignant par x, y, z les trois chiffres inconnus, on a pour le nombre cherché. . . . $N = 100x + 10y + z$; donc

$$xyz = 54,\ 6y = x + z,\ 100z + 10y + x = N - 594;$$

en éliminant N, la dernière devient $x - z = 6$; si donc on chasse y, il vient $x^2z + xz^2 = 324$, et $x - z = 6$, d'où (506)

$$z^3 + 9z^2 + 18z = 162;$$

mais on ne doit prendre pour z que des valeurs entières, et la méthode ci-dessus donne $z = 3$, d'où. . . $x = 9$, $y = 2$, et $N = 923$.

513. *Toute équation* $x^m + px^{m-1} + \text{etc.} + tx + u = 0$, *dont les coefficiens sont entiers, et dont celui du premier terme est l'unité, ne peut avoir de racine fractionnaire;* car soit $x = \frac{a}{b}$, on en tire

$$\frac{a^m}{b^m} + \frac{pa^{m-1}}{b^{m-1}} + \ldots + \frac{ta}{b} + u = 0,$$

en multipliant par b^{m-1}, il vient

$$\frac{a^m}{b} + pa^{m-1} + \ldots + tab^{m-2} + ub^{m-1} = 0;$$

équation visiblement absurde, puisque $\frac{a^m}{b}$ est nécessairement fractionnaire (33,5°), et $pa^{m-1} + \ldots + ub^{m-1}$ est entier.

514. Nous avons vu (503) qu'on peut préparer toute équation, de manière à lui donner la forme supposée dans ce dernier cas. Il suit de là qu'on sait trouver toutes les racines commensurables des équations ; car si x^m a un coefficient autre que l'unité, on le fera disparoître par une transformation, ce qui rendra entières les racines fractionnaires qu'elle peut avoir.

Soit, par exemple,

$$6x^4 - 19x^3 + 28x^2 - 18x + 4 = 0;$$

en faisant $x = \frac{y}{6}$, on a

$$y^4 - 19y^3 + 168y^2 - 648y + 864 = 0.$$

Or, cette équation a pour racines entières $y = 3$ et $y = 4$; d'où on tire $y^2 - 12y + 72 = 0$, puis $y = 6 \pm 6\sqrt{-1}$: ainsi, on a $x = \frac{1}{2}, = \frac{2}{3}, 1 \pm \sqrt{-1}$.

515. On peut se servir du procédé ci-dessus, pour trouver les *facteurs commensurables du second degré* ; car soit $x^4 - 3x^2 - 12x + 5 = 0$; représentons par. . . . $x^2 + bx + c$, le facteur cherché, la proposée pourra être regardée comme le produit de ce facteur par $x^2 + px + q$. Exécutons cette multiplication, et remarquons que le produit devant former chacun des termes du polynome proposé, l'égalité de ce produit et de ce polynome doit être établie terme à terme (*V.* ce qui sera dit n°. 557), on a

$$b + p = 0, c + bp + q = -3, pc + bq = -12, qc = 5,$$

éliminant p et q, il vient $2bc + 3b - b^3 - 12 = 0$, et $c^2 + c(3 - b^2) + 5 = 0$. Chassant c, il vient enfin $b^6 - 6b^4 - 11b^2 - 144 = 0$. Or, par hypothèse b et c sont rationnels, donc on doit trouver ici au moins une valeur entière pour b; sans quoi, il n'y auroit pas de facteurs commensurables du second degré. On trouve

$b = 3$ et $b = -3$; d'où $c = 5$ et $c = 1$: ainsi. . . .
$x^2 + 3x + 5$ et $x^2 - 3x + 1$ sont les facteurs cherchés.

Nous ne présentons d'ailleurs ceci que pour donner une application de notre méthode ; car on a d'autres moyens plus faciles d'opérer cette décomposition. *Voyez* l'Algèbre de Clairaut, 3e. partie, n°. 20.

7. *Racines Incommensurables.*

516. Lorsqu'on a dégagé une équation de ses racines égales, entières et fractionnaires, il ne reste plus que les irrationnelles et les imaginaires ; elles vont faire le sujet de nos recherches, et présentent des difficultés d'un ordre bien supérieur.

Supposons qu'on soit parvenu à connoître une valeur approchée a de l'une des racines de l'équation

$$kx^m + px^{m-1} + \text{etc.} + u = X = 0 :$$

on fera $x = a + y$, ce qui donnera (501) pour transformée $U + Ty + Vy^2 \ldots + ky^m = 0$. Mais y doit par supposition être une petite quantité, puisqu'elle est la différence entre la vraie racine et la partie déja approchée a; les puissances y^2, y^3, . . . seront donc elles-mêmes très-petites, par rapport à y : par conséquent Vy^2, Sy^3,... ky^m seront très petits, par rapport à $U + Ty$, puisque V, S,... sont des fonctions de a sans dénominateur, et qui, par là, ne peuvent jamais être très-grandes.

Ainsi, en réduisant l'équation à ses deux 1ers. termes $U + Ty = 0$, on en tirera

$$y = -\frac{U}{T}.$$

La manière dont U et T sont composés en a est connue ; on trouvera donc aisément une valeur de y, qui

ne sera pas exacte, mais qui, ajoutée à a, en donnera une, qui sera plus approchée que a.

Si donc on représente cette valeur par a', et si on suppose $x = a' + y$, ou plutôt, si on met pour a cette valeur a' dans $-\frac{U}{T}$, on aura une nouvelle correction. En continuant ainsi, on approchera indéfiniment de la racine. Ce procédé porte le nom de *Méthode de Newton*, de celui du grand homme qui l'a découvert.

Soit, par exemple, $x^3 - 2x - 5 = 0$. En faisant x égal à 2 et à 3, on obtient pour résultats -1 et 16: il y a donc (495) une racine entre 2 et 3, (mais plus voisine de 2). On peut même approcher davantage, en faisant $x = 2{,}1$ qui donne $0{,}061$; ainsi, la racine est entre 2 et 2,1, (vraisemblablement plus près de 2,1). On fera donc $x = a + y$, a étant $= 2{,}1$: il viendra

$$y = -\frac{a^3 - 2a - 5}{3a^2 - 2}.$$

Cette expression donne $y = -\frac{0{,}061}{11{,}23} = -0{,}0054$, en se bornant aux dix-millièmes, pour une 1re. approximation. Ainsi $x = 2{,}0946$. Mettons cette valeur pour a ci-dessus, il viendra

$$y = -\frac{0{,}00054155o536}{11{,}16204748} = -0{,}00004851 :$$

ainsi la 4e. décimale étoit fausse, et on a $x = 2{,}09455149$. On pourroit mettre cette valeur pour a, et obtenir une 3e. approximation, puis corriger les dernières décimales dont l'exactitude n'est point encore certaine.

Ce procédé est très simple; mais Lagrange a démontré (*Résolution numérique*, note V) qu'il n'étoit pas toujours exact : il lui en a substitué un autre, à l'abri de toute

objection, que nous exposerons, en traitant des fractions continues (554).

517. Il s'agit maintenant d'obtenir pour chaque racine une partie suffisamment approchée. On substituera pour x les nombres 0,1,2,3....., et si on obtient autant de changemens de signes qu'il y a de racines, on pourra appliquer la Méthode de Newton. Mais s'il n'en est pas ainsi (et ce cas est le plus ordinaire) entre deux substitutions successives (496), il y a 0,2,4,... ou 1,3,5... racines comprises, suivant que les résultats ont le même signe, ou des signes contraires. Le lieu des racines réelles et leur nombre seront donc incertains.

Pour éviter cette difficulté, il faudroit, au lieu des nombres 0,1,2,3..., substituer 0, δ, 2δ, 3δ, ... δ étant assez petit pour qu'il ne soit jamais possible que deux racines soient comprises entre deux substitutions successives. Or, c'est visiblement ce qui aura lieu si δ est *moindre que la différence qui existe entre les deux racines les plus voisines.* Cherchons donc un nombre qui remplisse cette condition.

Faisons $x = a + y$; la proposée $X = 0$, deviendra (501), $U + Ty + Vy^2 + Sy^3 + \ldots + ky^m = 0$.

Supposons que a soit racine; on aura $U = 0$, et divisant par y, il viendra

$$U = 0, \quad T + Vy + Sy^2 + \ldots + ky^m = 0.$$

Ces équations sont entre les inconnues a et y: et comme $y = x - a$, y est *la différence entre la racine* a *et toutes les autres.* Si on élimine a entre ces deux équations, on aura pour déterminer cette différence y une équation $Y = 0$.

Or, si on fait le même calcul, en supposant .... $x = b + y$, b étant une autre racine de la proposée,

il est clair qu'on obtiendra précisément la même équation $Y = 0$, puisque tous les calculs seront les mêmes, en remplaçant a par b : donc y est aussi la différence entre b et toutes les autres racines de la proposée. Et comme on peut en dire autant de celles-ci, on voit que y est *la différence qui existe entre une racine quelconque et toutes les autres.* Il suit de là que,

1°. m étant le degré de $X = 0$, $m(m-1)$ sera celui de $Y = 0$, puisque $m(m-1)$ est le nombre des différences $a-b$, $a-c$, ... $b-a$, $b-c$..., etc.

2°. Les différences deux à deux des racines sont égales et de signes contraires : donc, si on a $y = \alpha$, on doit avoir aussi $y = -\alpha$; de sorte que Y doit être rendu nul, en mettant $+\alpha$ ou $-\alpha$ pour y, ce qui exige qu'il n'y ait que des puissances paires de y. Cela résulte aussi de ce que Y peut être décomposé en facteurs de la forme $(y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)\ldots = 0$: ainsi, *l'équation aux différences* $Y = 0$, *n'a que des puissances paires.*

3°. Si on fait $y^2 = z$, on n'aura que des puissances entières de z, dans l'équation résultante $Z = 0$, qu'on nomme *au Carré des différences*, et qui est du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$.

518. On sait (504) trouver aisément un nombre moindre que la plus petite des racines positives de $Z = 0$: soit h ce nombre, on aura $z > h$ ou $y^2 > h$; donc $y > \sqrt{h}$. On a par là un nombre moindre que la plus petite différence entre les racines de la proposée, et on peut prendre $\delta = \sqrt{h}$. Mais on doit faire à cet égard quelques observations.

1°. Pour éviter les substitutions irrationnelles, on devra remplacer h par un nombre moindre, mais qui soit un carré exact : l^2 désignant ce carré, on aura $y > l = \delta$.

2°. Comme δ est la différence entre les substitutions

successives, plus δ sera petit, et plus il y aura de nombres à substituer entre les limites des racines : c'est pourquoi il faudra prendre δ le plus grand possible. On devra donc choisir pour la limite inférieure l' des racines de $Z = 0$, le plus grand nombre possible.

3°. S'il arrive que l soit $= 1$ ou > 1 ; alors, on pourra faire $\delta = 1$.

4°. Si au contraire l est < 1, et tel que $l = \frac{g}{i}$; comme il seroit pénible de substituer pour x les nombres $0, \frac{g}{i}, \frac{2g}{i}, \ldots$ on fera $x = \frac{t}{i}$, les racines de t, et par conséquent les différences entre ces racines, seront i fois plus grandes que celles de x. Il suffira donc de substituer pour t les nombres entiers $0, g, 2g, \ldots$ on voit donc qu'*on peut toujours transformer une équation, de sorte qu'il n'y ait jamais qu'une racine comprise entre deux nombres entiers successifs.*

5°. En chassant le second terme d'une équation, on augmente toutes les racines d'une même quantité, ce qui n'altère pas leur différence. Ainsi, l'équation $Z = 0$ doit être la même, lorsqu'on opère sur la transformée privée de second terme. Cette remarque facilite les calculs.

Soit $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$, en mettant $0, 1, 2 \ldots$ pour x, on obtient $+1, -1, +1, \ldots$ ainsi, il y a une racine entre 0 et 1, et une entre 1 et 2. Mettant $-x$ pour x, et raisonnant de même, on trouve une racine entre -1 et -2. Ainsi, le lieu des trois racines de la proposée est connu, et la méthode de Newton s'applique sur-le-champ. En faisant $x = a + y$, on obtient $y = -\frac{a^3 - a^2 - 2a + 1}{3a^2 - 2a - 2}$. Si donc on met pour a tour-à-tour les valeurs approchées de x, qu'on

trouve facilement être 0,4 ... 1,8 ... — 1,2 ; on en déduira par des corrections successives, les racines. . . . 0,445054 ... 1,801938 et — 1,246987. Ici, l'équation au carré des différences n'a été d'aucun usage.

En cherchant cette dernière équation d'après les principes précédens (que les exemples suivans vont développer), on aura $z^3 - 14z^2 + 49z - 49 = 0$, et comme on trouve $z > 1$, on a $\delta = 1$, ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu.

Lorsque nous avons résolu ci-devant l'équation . . . . $x^3 - 2x - 5 = 0$, nous n'avions reconnu que la présence d'une des racines : pour avoir égard aux autres, cherchons l'équation au carré des différences. Faisons $x = a + y$, partageons l'équation résultante en deux autres, $a^3 - 2a - 5 = 0$, $3a^2 - 2 + 3ay + y^2 = 0$: puis éliminons a, il viendra (506), $y^6 - 12y^4 + 36y^2 + 643 = 0$; équation du 6ᵉ. degré, et qui n'a que des puissances paires, ainsi qu'on le savoit d'avance.

Faisant $y^2 = z$, on a $z^3 - 12z^2 + 36z + 643 = 0$. Pour avoir la limite inférieure des racines positives (504), on fera $z = \frac{1}{v}$ il viendra $643v^3 + 36v^2 - 12v + 1 = 0$. Or, le théorême connu (497) donne $1 + \sqrt{\frac{12}{643}}$ pour la limite supérieure des racines de v ; et en faisant $v = 1$, on reconnoît aisément (518, 2°.) que 1 est aussi limite ; donc $v < 1$, d'où $z > 1$, $y > 1$. En faisant $x = 0, 1, 2, \ldots$ on est par là certain d'obtenir autant de changemens de signes qu'il y a de racines réelles dans la proposée : ainsi elle en a deux qui sont imaginaires.

Pour $x^3 - 12x^2 + 41x - 29 = 0$, il faudra également recourir à l'équation au carré des différences, parce qu'on ne reconnoît la présence que d'une racine entre 0

et 1. On fera donc $x = a + y$, d'où

$$a^3-12a^2+41a-29=0,\ 3a^2-24a+41+(3a-12)y+y^2=0.$$

éliminant a, puis faisant $y^2 = z$, on a l'équation au carré des différences $z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$: puis $z = \frac{1}{v}$ donne $v^3 - 9v^2 + \frac{6}{7}v - \frac{1}{49} = 0$; on a $v < 10$ ou plutôt $v < 16$, d'où $z > \frac{1}{16}$ et $y > \frac{1}{4}$. On devra donc faire $x = \frac{t}{4}$, et on sera sûr qu'entre deux nombres entiers successifs, il ne pourra y avoir qu'une seule racine de t comprise; on a

$$t^3 - 48t^2 + 656t - 1856 = 0.$$

Or, en faisant $t = 0, 1, 2, 3\ldots$ on obtient des résultats de signes contraires pour 3 et 4; la racine indiquée ici répond à celle de x comprise entre 0 et 1. De même $t = 21$ et 22, donne $+13$ et -8; enfin $t = 23$ donne $+7$. Il y a donc deux racines de x comprises entre 5 et 6. Il est facile de continuer le calcul, et on trouvera 0,95108... 5,35689... et 5,69203... pour les trois racines de x.

De même $x^3 - 7x + 7 = 0$, donne. . . . . $z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$ pour équation au carré des différences : $z = \frac{1}{v}$ donne $v^3 - 9v^2 + \frac{6}{7}v - \frac{1}{49} = 0$, d'où $v < 10$. Mais on reconnoît que $v < 9$, ainsi $z > \frac{1}{9}$ et $y > \frac{1}{3}$. On verra ainsi que les deux racines positives sont comprises entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$. On trouve enfin $x = 1,35689$ et $x = 1,69203$. Pour la racine négative, on change x en $-x'$; x' est entre 3 et $\frac{10}{3}$, et on a $x = -3,04892$.

Ces calculs, sur-tout celui de l'équation au carré des différences, sont très-longs; mais d'une part, cette marche est inévitable, et ses difficultés tiennent à la nature

même de la chose ; de l'autre part, nous donnerons des moyens bien plus faciles d'obtenir l'équation en z (541, II).

8. *Racines imaginaires.*

519. Soient a, b, c.... les racines d'une équation. . . * $x^m + px^{m-1} + \ldots = X = 0$ de degré pair, et supposons d'abord que 2 ne soit facteur de m qu'à la 1re. puissance (comme pour $m = 6, 10, 14 \ldots$).

Formons l'équation $\Phi = 0$, qui ait pour inconnue $\varphi = a + b + rab$, r étant un nombre quelconque. Pour cela, nous éliminerons a et b, entre

$$a^m + pa^{m-1} + \ldots = 0,\ b^m + pb^{m-1} + \ldots = 0,\ \varphi = a + b + rab.$$

Les racines de $\Phi = 0$, seront aussi $a + c + rac, \ldots$ Ici, comme pour l'équation au carré des différences, le degré de Φ sera $n = m \cdot \dfrac{m-1}{2}$; or n est impair, puisque les facteurs $\frac{1}{2}m$, et $m - 1$ le sont ; donc $\Phi = 0$ a au moins une racine réelle, telle que $\varphi = a + b + rab$.

Comme on peut attribuer à r un nombre illimité de valeurs ; on formera ainsi autant d'équations $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0, \ldots$ qui auront chacune au moins une racine réelle, $a + c + r'ac$, ou $b + c + r''bc$, ou etc. .... On voit donc qu'on devra trouver, au plus après n calculs semblables, une équation $\Phi' = 0$, dont la racine réelle soit $\varphi' = a + b + r'ab$, c.-à-d. formée du système des deux mêmes valeurs a et b, qui entrent dans la racine réelle déja reconnue. De sorte qu'on est assuré que parmi les racines réelles ou imaginaires de $X = 0$, il en est au moins deux a et b, telles qu'en posant

$$a + b + rab = g, \quad a + b + r'ab = g',$$

g et g' sont réels : et par conséquent $a + b$ et ab le

* sont aussi. Le diviseur $x^2 - (a+b)\,x + ab$ de X, est donc une quantité réelle du second degré ; ou, ce qui revient au même, deux des racines au moins de $X=0$, sont de la forme $x = p \pm q\sqrt{-1}$.

Supposons maintenant que m n'ait 2 pour facteur qu'au carré, (comme pour $m = 4, 12, 20\ldots$), alors le degré n de $\Phi = 0$ n'aura 2 pour facteur qu'à la 1re. puissance. Ainsi $\Phi = 0$ aura au moins une racine de la forme $a + b + r'ab = \alpha + \beta\sqrt{-1}$: et de même que ci-dessus, en donnant à k d'autres valeurs, on aura aussi $a + b + r'ab = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$. Les valeurs qui en résultent pour $a+b$ et ab sont aussi de même forme

$$a + b = A = g + h\sqrt{-1}, \quad ab = B = g' + h'\sqrt{-1};$$

$X = 0$ a pour facteur $x^2 - Ax + B = 0$, d'où

$$x = \tfrac{1}{2}A \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - 4B)}.$$

Or $A^2 - 4B$ est visiblement de la forme $k \pm l\sqrt{-1}$; assignons celle de $\sqrt{(k \pm l\sqrt{-1})}$. Pour cela, faisons

$$\psi = \sqrt{(k + l\sqrt{-1})} + \sqrt{(k - l\sqrt{-1})}$$
$$\omega = \sqrt{(k + l\sqrt{-1})} - \sqrt{(k - l\sqrt{-1})},$$

d'où $\quad \psi^2 = 2k + 2\sqrt{(k^2 + l^2)}, \quad \omega^2 = 2k - 2\sqrt{(k^2 + l^2)}.$

Comme $\sqrt{(k^2 + l^2)}$ est $> k$, quel que soit le signe de k, ce radical donnera son signe à ψ^2 et à ω^2 : on voit donc que ψ^2 est positif et ω^2 négatif; faisons. . . $\psi = k'$ et $\omega = l'\sqrt{-1}$. En ajoutant et retranchant nos équations, il vient

$$\psi \pm \omega \text{ ou } k' \pm l'\sqrt{-1} = 2\sqrt{(k \pm l\sqrt{-1})}.$$

Par là notre racine devient

$$x = \tfrac{1}{2}(g + h\sqrt{-1}) \pm \tfrac{1}{4}(k' \pm l'\sqrt{-1}),$$

de sorte que x a encore deux racines de la forme. . .

$x = p \pm q\sqrt{-1}$, et par conséquent X a un facteur réel du second degré $(x-p)^2 + q^2$.

Si 2 n'est facteur qu'au cube dans m (comme pour $m = 8, 24...$), 2 ne le sera qu'au carré dans n; ainsi Φ a un facteur réel du second degré : X est donc dans le même cas, puisque le raisonnement précédent a encore lieu; et ainsi de suite. Donc,

1°. *Toute équation de degré pair, est décomposable en facteurs réels du second degré.*

2°. *La même chose a lieu pour les équations de degré impair, mais il y a en outre un facteur réel du premier degré* (498).

3°. *Les racines imaginaires des équations ne peuvent être que de la forme* $p \pm q\sqrt{-1}$.

4°. *Toute fonction algébrique* F *de* $p \pm q\sqrt{-1}$, *a la même forme*; car, faisons $\varphi = p \pm q\sqrt{-1}$; d'où $(\varphi - p)^2 + q^2 = 0$. Désignons par θ, ce que devient la fonction F, ou $\theta = F(\varphi)$. On fera disparoître les imaginaires par des élévations de puissances, et il en résultera une relation réelle entre θ et φ; de sorte qu'éliminant φ à l'aide de $(\varphi - p)^2 + q^2 = 0$, il ne restera plus d'inconnue que θ. Or, les racines de θ seront nécessairement de la forme $\theta = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. Donc, etc... La même chose auroit lieu, si F contenoit deux quantités imaginaires $p \pm q\sqrt{-1}$ et $p' \pm q'\sqrt{-1}$; ou même un plus grand nombre.

520. Soient, d'après cela, $a, b, c....$ les racines réelles de l'équation $X = 0$; et ses racines imaginaires

$$\alpha \pm \beta\sqrt{-1}, \quad \gamma \pm \delta\sqrt{-1}\ldots$$

Les différences de ces racines seront de quatre sortes.

1°. *Entre deux racines réelles*, $a - b$, $a - c$, ... les carrés seront *positifs*.

* 2°. *Entre deux racines imaginaires d'un même couple*, $\pm 2\beta\sqrt{-1}$; $\pm 2\delta\sqrt{-1}$, les carrés seront négatifs $-4\beta^2$, $-4\delta^2$....

3°. *Entre une racine réelle et une imaginaire* .... $a - \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, $b - \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, ... le carré sera imaginaire : à moins qu'on n'ait $a = \alpha$, alors il seroit négatif $-\beta^2$, et se rencontreroit deux fois.

4°. *Entre deux racines imaginaires de couples différens* $\alpha - \gamma \pm (\beta - \delta)\sqrt{-1}$, ... le carré sera imaginaire ; à moins qu'on n'ait $\alpha = \gamma$, ou $\beta = \delta$: il seroit négatif et double dans le 1er. cas, positif dans le 2e.

On voit donc par là que les racines négatives de l'équation au carré des différences $Z = 0$, proviennent des racines imaginaires d'un même couple ; à l'exception du cas où la partie réelle de deux racines imaginaires seroit la même, ou bien que cette partie seroit égale à une racine réelle ; mais alors $Z = 0$ auroit des racines négatives égales.

* 521. Cela posé, cherchons les racines négatives de $Z = 0$; pour cela, changeons z en $-z$, et trouvons les racines positives h, i, ... puis, posons $h = 4\beta^2$, $i = 4\gamma^2$... ; d'où $\beta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{h}$, $\gamma = \pm\frac{1}{2}\sqrt{i}$, ... on connoîtra par là, la partie imaginaire de chaque racine. Pour obtenir la partie réelle, on fera $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, dans $X = 0$, on égalera à zéro séparément les termes réels et les termes imaginaires (494) ; ceux-ci seront divisibles par $\beta\sqrt{-1}$. On aura ainsi deux équations entre α et β qui par l'élimination pourroient servir à déterminer ces quantités. Mais comme β est connu, si on substitue quelqu'une des valeurs ci-dessus $\frac{1}{2}\sqrt{h}$, $\frac{1}{2}\sqrt{i}$... on aura deux équations en α, qui devront avoir lieu ensemble, et qui, par conséquent, auront un commun diviseur (491), lequel égalé à zéro donnera α.

Si le commun diviseur n'existoit pas, cela prouveroit * que la racine négative qu'on a employée provient d'un des cas d'exception indiqués : le calcul vérifieroit cette assertion, et on devroit reconnoître qu'en effet, la partie réelle est la même dans deux racines, et que $Z = 0$ a des racines négatives égales.

Si le commun diviseur est du second degré, alors deux valeurs de α répondent à la même de β ; deux racines auroient donc la même partie imaginaire.

Soit, par exemple, $x^3 - 8x + 32 = 0$, dont

$$z^3 - 48z^2 + 576z + 25600 = 0.$$

est l'équation au carré des différences. En mettant $-z$ pour z, et cherchant les racines positives, on trouve $z = 16$, ainsi $4\beta^2 = 16$, d'où $\beta = 2$.

Mais $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ change la proposée en $\alpha^3 - 8\alpha + 32 - 3\beta^2\alpha = 0$, et $3\alpha^2 - \beta^2 - 8 = 0$: faisant $\beta = 2$, on a $\alpha^3 - 20\alpha + 32 = 0$, et $\alpha^2 - 4 = 0$, qui ont $\alpha - 2$ pour facteur commun ; donc $\alpha = 2$ et $x = 2 \pm 2\sqrt{-1}$, ainsi qu'on peut aisément s'en assurer.

Du reste, α et β peuvent être incommensurables. C'est ainsi que dans l'exemple $x^3 - 2x - 5 = 0$, dont on a déja obtenu la racine réelle, l'équation au carré des différences est $z^3 - 12z^2 + 36z + 643 = 0$; mettant $-z$ pour z, on a $z^3 + 12z^2 + 36z - 643 = 0$. La racine positive est entre 5 et 6. Appliquant donc la méthode de Newton, on a $z = 5,1614\ldots = 4\beta^2$, d'où $\beta = 1,136\ldots$ Or $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ donne $\alpha^3 - (3\beta^2 + 2)\alpha - 5 = 0$, et $3\alpha^2 - \beta^2 - 2$ poussant le calcul du commun diviseur jusqu'à ce qu'on ait un reste du 1er. degré, et l'égalant à zéro, on trouve $4\alpha(2\beta^2 + 1) + 15 = 0$, d'où $\alpha = -1,0473$. Ainsi $x = -1,0473 \pm 1,136\sqrt{-1}$.

* 522. La longueur des calculs qui sont nécessaires pour obtenir l'équation $Z = 0$, et le peu d'avantage qu'on tire de la connoissance des racines imaginaires en elles-mêmes, rendroit très-utile un procédé qui serviroit à donner d'avance le nombre de ces racines, afin de juger s'il y a en effet plusieurs racines comprises entre les substitutions $0, 1, 2, 3 \ldots$; car s'il n'y en peut avoir qu'une seule, l'équation $Z = 0$ devient inutile à la recherche des racines réelles. Voici un principe qui peut servir à cet objet dans un grand nombre de cas.

Soient $+ + - - + - - - + - + + - + - + +$ les signes successifs des termes d'un polynome X ordonné par rapport à x : formons le produit $X(x + a)$ ou $Xx + Xa$. Les signes des termes de Xx et Xa seront les mêmes que ceux de X : pour ordonner Xx avec Xa, il faut placer ce 2ᵉ. produit au-dessous de l'autre, en reculant les termes d'un rang vers la droite. On a

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
+ & + & - & - & + & - & - & - & + & - & + & + & - & + & - & + & + & \\
 & + & + & - & - & + & - & - & - & + & - & + & + & - & + & - & + & + \\
\hline
+ & + & i & - & i & i & - & - & i & i & i & + & i & i & i & i & + & +.
\end{array}$$

Le signe de chaque terme du produit sera *incertain*, lorsque ceux des termes correspondans seront différens, puisqu'il dépend de la grandeur relative de leurs coefficiens. Ce cas arrive lorsque deux termes successifs de X ont des signes contraires; cette incertitude de signe est indiquée par la lettre i. On voit donc que les *Variations* de signe dans X donnent au produit des signes incertains, et les *Permanences* des signes certains.

D'après cela, disposons de chaque signe incertain i, de manière à produire le plus grand nombre possible de variations; on n'en pourra au plus former qu'un nombre

égal à celui des lettres *, car un nombre impair de * signes successifs incertains, doit toujours être compris entre des signes différens + et —, tandis qu'au contraire un nombre pair est entre des signes semblables + et +, ou — et —. X ne sauroit donc avoir moins de variations que le produit, qui ayant un terme de plus, a par conséquent au moins une permanence de plus.

D'où il suit que *l'introduction d'une racine négative dans une équation, donne lieu à celle d'au moins une permanence de signe.* En multipliant X par $x - a$, et disant des permanences, ce que nous avons dit des variations, on trouve que *l'introduction d'une racine positive, donne lieu à celle d'au moins une variation de signe.*

Donc *une équation ne peut avoir plus de racines positives que de variations de signes; ni plus de racines négatives que de permanences.* C'est en cela que consiste la *règle de Descartes*, du nom de son célèbre inventeur, quoiqu'il ne l'ait ni démontrée, ni même présentée sous cette forme.

523. *Si l'équation n'a que des racines réelles, elle a précisément autant de variations de signes que de racines positives, et autant de permanences que de racines négatives;* car soient p et v les nombres de permanences et de variations; N et P ceux des racines négatives et positives, le degré de l'équation est d'une part $p + v$, et de l'autre $N + P$; ainsi $p + v = N + P$. Or, on ne peut supposer $p < N$ d'après ce qui vient d'être démontré; ni $p > N$, car il en résulteroit $v < P$, ce qui est contraire à notre théorême. Ainsi $p = N$, d'où $v = P$. *

C'est ainsi que si les trois racines de l'équation. . . $x^3 - 12x^2 + 41x - 29 = 0$ sont réelles, elles doivent être positives, parce qu'il n'y a pas de permanences. C'est en effet

* ce qui a lieu (518). Pareillement $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$, qui a deux racines positives et une négative, a deux variations et une permanence.

Soit aussi $x^3 + px + q = 0$. En remplaçant le terme qui manque par $\pm 0x^2$, on a $x^3 \pm 0x^2 + px + q = 0$. Or, le signe supérieur annonce trois racines négatives, et l'inférieur n'en indique qu'une seule : ces résultats étant contradictoires, on reconnoît qu'il y a des racines imaginaires.

* 524. Soient m le degré d'une équation $X = 0$, r le nombre de ses racines réelles, $2i$ celui des imaginaires; on a $m = r + 2i$. Il suit de ce qu'on a dit (520) que des n racines, supposées inégales, de l'équation $Z = 0$, il y en aura $\frac{1}{2}r(r-1) = R$ de réelles positives, i de réelles négatives, et $2i(r+i-1) = I$ d'imaginaires.

Cela posé, le produit des R racines positives de $Z = 0$ est positif. D'un autre côté, comme

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = \alpha^2 + \beta^2,$$

le produit des I racines imaginaires est aussi positif. Enfin, le produit des i racines négatives est positif ou négatif, suivant que i est pair ou impair.

Le dernier terme d'une équation étant le produit de ses racines, pris en + ou en —, suivant que son degré n est pair ou impair ; on voit que le dernier terme de $Z = 0$, doit être négatif, lorsque des deux nombres n et i, l'un est pair et l'autre impair ; tandis qu'il est positif dans le cas contraire. Or, $n - i$ est impair dans la 1re. supposition et pair dans la 2e. : d'ailleurs

$$n = m \cdot \frac{m-1}{2} \text{ et } m = r + 2i,$$

donnent $n - i = \frac{r(r-1)}{2} + 2i(r+i-1)$,

ou $n - i = R + I$; $n - i$ est donc pair ou impair avec R, *
puisque I est pair.

Donc *le dernier terme de l'équation* $Z = 0$ *au carré des différences sera positif ou négatif, suivant que* $\frac{r(r-1)}{2}$ *sera pair ou impair.* 1°. Si le dernier terme est positif $\frac{r(r-1)}{2}$ sera pair ; donc r ou $r-1$ sera multiple de 4 ; c.-à-d. que $r = 4\lambda$, ou $r = 4\lambda + 1$; les racines réelles seront donc en nombre 0, 1, 4, 5, 8, 9, ...

2°. Si le dernier terme de $Z = 0$ est négatif, $\frac{r(r-1)}{2}$ sera impair ; donc ou $\frac{r}{2}$ et $r-1$ seront impairs ; ou bien r sera impair, ainsi que $\frac{r-1}{2}$; c.-à-d. qu'on aura $r = 4\lambda + 2$ ou $r = 4\lambda + 3$: le nombre des racines réelles sera donc 2, 3, 6, 7, 10, 11 . . . .

9. *Résolution des équations à deux ou à trois termes.*

525. De $Ax^n = B$, on tire $x = \pm\sqrt[n]{\frac{B}{A}}$, si n est pair : *
x n'est réel qu'autant que A et B ont le même signe (128). Si n est impair x est réel et a le même signe que $\frac{B}{A}$. Soit donc en général k la racine n^e. de $\frac{B}{A}$, ou $k^n = \frac{B}{A}$, on en tire $x^n - k^n = 0$: en faisant $x = ky$, on a $y^n - 1 = 0$. Or, si on connoissoit toutes les valeurs de y, en les multipliant par k, on auroit celles de x ; donc *tout nombre a donc pour racine* n^e. *le produit de sa racine arithmétique par celles de l'unité.*

Ce théorème simplifie notre recherche ; ainsi $x^3 - k^3 = 0$

* devient $y^3 - 1 = 0$, d'où $y - 1 = 0$ et $y^2 + y + 1 = 0$; ainsi $y = 1$ et $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$ et

$$x = k,\ x = \tfrac{1}{2}k(-1 \pm \sqrt{-3}).$$

De même $x^4 - k^4 = 0$, devient $y^4 - 1 = 0$, d'où $y = \pm 1$, et, divisant par $y^2 - 1$, on a $y^2 + 1 = 0$; ainsi $x = \pm k$, $x = \pm k\sqrt{-1}$.

En général, la question est réduite à la résolution de

$$y^n - 1 = 0,\ \text{ou}\ y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots\ldots + 1 = 0,$$

en divisant $y^n - 1$ par $y - 1$, (99).

526. Soit α l'une des racines imaginaires de $y^n - 1 = 0$; comme $\alpha^n = 1$, on voit que $(\alpha^n)^p = \alpha^{np}$ est aussi $= 1$, quel que soit le nombre entier p, positif ou négatif : l'équation $y^n - 1 = 0$ est donc satisfaite lorsqu'on fait $y = \alpha^p$, c.-à-d., que *si α est racine, α^p l'est aussi*. donc α^2, α^3, ... α^{-2}, α^{-3},.. sont autant de racines.

1°. Si p est pris $> n$, il sera de la forme $nk + i$, i étant $< n$; α^p sera par là $= \alpha^{nk} \times \alpha^i$ ou α^i puisque $\alpha^n = 1$. Ainsi au-delà de $p = n$, α^p reprend les mêmes valeurs α, α^2, α^3,.. qu'on a obtenues, en prenant pour p les nombres 1, 2, 3,....

2°. Si p est négatif comme α^{-p} ou $\frac{1}{\alpha^p} = \frac{\alpha^i}{\alpha^{p+i}}$, prenons i tel que $p + i$ soit un multiplie de n, ou $p + i = nk$, α^{p+i} devient $= 1$, et on a $\alpha^{-p} = \alpha^i$, or. . . . . $i = nk - p = n(k - 1) + (n - p)$; donc $\alpha^{-p} = \alpha^{n-p}$. Il suit de là que les racines.,... α^{-2}, α^{-1}, α^0, α^1, α^2, α^3... ne sont pas distinctes et en nombre indéfini; elles se reproduisent dans le même ordre de n en n termes, à partir de l'un quelconque d'entre eux, et la connoissance de l'une d'elles (autre que $+1$ ou -1) entraîne celle des autres.

C'est ainsi que $y^3 - 1 = 0$ a pour racines imaginaires $-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$, et $-\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$; on verra

que si l'une est $=\alpha$, elle sera aussi α^4, α^7,... α^{-2}, α^{-5},...
et l'autre sera α^2, α^5,... α^{-1}, α^{-4},....

527. Nous allons chercher toutes les racines imaginaires * de l'équation $y^n - 1 = 0$, ou plutôt de $y^n \pm 1 = 0$, à laquelle on ramène dans tous les cas $Ax^n \pm B = 0$.

Soit $\cos x = p$; on a vu (361) que

$$\cos 0x = 1,\ \cos 1x = p,\ \cos 2x = 2p^2 - 1,\ \cos 3x = 4p^3 - 3p, \ldots$$

chaque valeur étant la somme des deux cosinus précédens multipliés respectivement par $2p$ et -1. Or ces résultats observent entre eux une loi qu'on met en évidence par l'artifice d'analyse suivant dû à La Grange.

Soit $2\cos x = y + \frac{1}{y}$; d'après la loi indiquée, pour obtenir $\cos 2x$, il faut multiplier $\cos x$, ou $\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)$, par $y + \frac{1}{y}$, et retrancher $\cos 0x$ ou 1. On trouve...
$2\cos 2x = y^2 + \frac{1}{y^2}$; on trouve de même

$$2\cos 3x = y^3 + \frac{1}{y^3},\ 2\cos 4x = y^4 + \frac{1}{y^4}, \ldots.$$

Démontrons la loi de ces résultats; pour cela, supposons qu'elle soit vérifiée pour deux degrés consécutifs $n-1$ et $n-2$ de sorte que

$$2\cos(n-2)x = y^{n-2} + \frac{1}{y^{n-2}},\ 2\cos(n-1)x = y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}};$$

multiplions la moitié de la dernière par $y + \frac{1}{y}$, retranchons-en la moitié de la précédente; nous trouverons......
$2\cos nx = y^n + \frac{1}{y^n}$. Il suffit donc que la loi soit démontrée très

pour $2\cos 0x = y^0 + \frac{1}{y^0}$ et $2\cos x = y^1 + \frac{1}{y^1}$, pour en conclure qu'elle est vraie pour $2\cos 2x$, $2\cos 3x$,....

* 528. Les valeurs de $2\cos x$ et $2\cos nx$ donnent

$$y^2 - 2y\cos x + 1 = 0,$$
$$y^{2n} - 2y^n \cos nx + 1 = 0;$$

équations qui serviront à connoître y et $\cos nx$, lorsqu'on aura trouvé $\cos x$: ainsi, on obtiendra directement $\cos nx$, sans s'astreindre à chercher successivement $\cos 2x$, $\cos 3x$,.... Si donc on prend dans les tables les valeurs de $\cos x$ et $\cos nx$, qui répondent à un arc quelconque x, nos équations ne renfermant plus qu'une inconnue y, devront s'accorder entre elles et avoir une racine commune α. Mais si $y = \alpha$ satisfait à ces équations, la substitution de $\frac{1}{\alpha}$ pour y prouve que $\frac{1}{\alpha}$ y satisfait aussi : elles ont par conséquent deux racines communes, ou plutôt *la première équation divise la seconde.* Soit $\varphi = nx$, il faut donc que, quel que soit φ,

$$y^2 - 2y\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + 1 \textit{ divise } y^{2n} - 2y^n\cos\varphi + 1 \ldots\ldots (1)$$

529. Appliquons ce théorême à la recherche des racines de $y^n \mp 1 = 0$. Si on fait $\varphi = k\pi$, k étant un entier quelconque, et π la demi-circonférence, $\cos\varphi$ sera $=+1$ ou $=-1$, suivant que k sera pair ou impair; et le 2e. trinome deviendra $y^{2n} \mp 2y^n + 1$ ou $(y^n \mp 1)^2$. Ainsi,

$$y^2 - 2y\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \textit{ divise } y^n \mp 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

quel que soit l'entier k, *pair lorsqu'on a* $y^n - 1$, *impair*

pour $y^n + 1$. Cependant si $y^2 - 2y\cos\ldots$ est un carré, on prendra seulement sa racine pour diviseur de $y^n \mp 1$.

Comme $n + i$ et $n - i$ sont ensemble pairs ou impairs, soit $k = n \pm i$; l'arc $\frac{k\pi}{n}$ deviendra $\pi \pm \frac{i\pi}{n}$: ces arcs ont le même cosinus. Ainsi lorsqu'après avoir pris pour k les diverses valeurs (paires ou impaires), on veut faire $k > n$, le trinome $y^2 - 2y\cos\ldots$ reproduit les mêmes facteurs en sens inverse.

Si on prend $k > 2n$, alors k est de la forme $2ln + i$; l'arc $\frac{k\pi}{n}$ devient $2l\pi + \frac{i\pi}{n}$ dont le cosinus est encore le même que si on eût fait $k = i$. On retomba encore sur les même facteurs que ci-dessus, mais dans le même ordre. *Il est donc inutile d'attribuer à* k *des valeurs* > n.

Si n est pair, $\frac{1}{2}n + i$ et $\frac{1}{2}n - i$ sont aussi pairs ou impairs ensemble; $k = \frac{1}{2}n \pm i$ donne pour $\frac{k\pi}{n}$ les arcs... $\frac{1}{2}\pi \pm \frac{i\pi}{n}$ dont les cosinus sont égaux, mais de signe contraire, de sorte que *quand* n *est pair, au-delà que* $k = \frac{1}{2}n$, *on retombe sur les mêmes facteurs du second degré, au signe près du second terme qui est différent.*

Dans tous les cas, les facteurs qu'on obtient en faisant $k < n$ sont visiblement différens.

Soit $\frac{k\pi}{n} = x$, en résolvant l'équation $y^2 - 2y\cos x + 1 = 0$ on a pour les racines de $y^n \mp 1 = 0$, $y = \cos x \pm \sin x\sqrt{-1}$. L'imaginaire ne disparoît qu'autant que 1°. $x = 0$ d'où $k = 0$; alors la proposée est $y^n - 1 = 0$, et on a la racine réelle $y = 1$. 2°. $x = \pi$, d'où $k = n$, ce qui suppose que n est pair dansle cas de $y^n - 1$; ou impair dans celui de $y^n + 1$;

$y=-1$ est alors une racine réelle. Tout cela est d'accord avec ce qu'on connoît d'ailleurs.

* 530. En mettant $\frac{x}{a}$ pour y, on trouve

$$x^2-2\,ax\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+a^2$$

pour la formule générale des facteurs de $x^n \mp a^n$.

Soit x^4+a^4, on fera $k=1$, et $=3$; mais comme les arcs $\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{3}{4}\pi$ ont leurs cosinus égaux en signes contraires, et que $\cos 50^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, on a

$$x^4+a^4=(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)\,(x^2-ax\sqrt{2}+a^2).$$

Pour y^6+1, on fera $k=1$, $=3$ et $=5$; comme $\cos\frac{1}{2}\pi=0$ et $\sin\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$, (352); on en conclut $\cos\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, enfin $\cos\frac{5}{6}\pi=-\cos\frac{1}{6}\pi$, et on a les facteurs y^2+1, $y^2-y\sqrt{3}+1$ et $y^2+y\sqrt{3}+1$.

Soit x^6-a^6; on fera $k=0$, $=2$, $=4$ et $=6$; on aura $x+a$, $x-a$, x^2-ax+a^2 et x^2+ax+a^2.

Enfin y^5-1 donne $y-1$, $y^2-2y\cos\frac{2}{5}\pi+1$ et $y^2+2y\cos\frac{1}{5}\pi+1$, à cause de $\cos\frac{4}{5}\pi=-\cos\frac{1}{5}\pi$.

6. 531. On a trouvé une construction élégante de ces facteurs, et c'est ce qu'on nomme le *Théorême de Côtes*, du nom de l'inventeur; voici en quoi il consiste. Sur le diamètre quelconque AH du cercle $ACHL$, dont le rayon $RA=a$, on prend un point arbitraire O; puis on partage la courbe en $2n$ parties égales Aa, aB, Bb, bC,... chacun de ces arcs est $=\frac{\pi}{n}$: on mène les rayons vecteurs Oa, OB, Ob,.... Cela posé soit $AC=\alpha$, $OR=x$, CP perpendiculaire sur RA, donne le triangle RCP dans lequel on a $CP=a\sin\alpha$, $RP=a\cos\alpha$, d'où $OP=a\cos\alpha-x$;

donc $OC^2 = x^2 - 2ax \cos \alpha + a^2$; et comme AC répond 6.
à un nombre k d'arcs $= \frac{\pi}{n}$, on a $\alpha = \frac{k\pi}{n}$. *

OC^2 ou $OC \times OL$ est donc facteur de $x^n \mp a^n$ suivant que le nombre k de divisions est pair ou impair : et comme $OA = a - x$ et $OH = a + x$, il est aisé de voir que si Z', Z''.... sont les rayons vecteurs menés aux points de division pairs, et z' z''.... de même pour les impairs, on a $a^n - x^n = Z' . Z'' . Z''' ....$ $a^n + x^n = z' . z'' . z''' ....$

L'origine des rayons vecteurs pourroit aussi être prise en O' sur le prolongement du diamètre.

532. Parmi les équations à trois termes, prenons celles où l'un des exposans est double de l'autre : soit donc $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$. En faisant $x^n = z$, on a l'équation du 2e. degré $Az^2 + Bz + C = 0$. *Lorsque les racines sont réelles*, en les désignant par f et g, on a les équations à deux termes $x^n = f$, $x^n = g$ qu'on sait résoudre. *

Ainsi, pour *trouver deux nombres dont le produit soit* 10 *et la somme des cubes* 133, l'un de ces nombres étant x, l'autre est $\frac{10}{x}$: donc

$$x^3 + \frac{10^3}{x^3} = 133 \quad \text{ou} \quad x^6 - 133\,x + 1000 = 0;$$

En faisant $x^3 = z$, on trouve $z = \frac{1}{2}(133 \pm 117)$, ainsi $x^3 = 125$ et $x^3 = 8$. Soient donc 1, α et α^2 les racines cubiques de 1, trouvées ci-dessus (525), on a six valeurs de x, qui donnent pour les trois solutions du problème, 5 et 2, 5α et $2\alpha^2$, $5\alpha^2$ et 2α : la première est seule réelle.

Si l'équation en z a ses *racines égales*, alors (138) on a $B^2 - 4AC = 0$, et la proposée est un carré; ainsi elle se réduit à la forme $ax^n - b = 0$.

533. Enfin si $Az^2 + Bz + C = 0$ a ses *racines imaginaires*, $B^2 - 4AC$ est < 0 : on fera $Ax^{2n} = Cy^{2n}$, ce qui *

ramenera la proposée à

$$y^{2n}+\frac{By^n}{\sqrt{(AC)}}+1=0,$$

équation de même forme : mais comme les coefficiens extrêmes sont $=1$; elle est comparable à celle (1). On posera donc $\cos\varphi=\frac{-B}{2\sqrt{(AC)}}$, puis on cherchera à l'aide des tables, quel est l'arc φ qui satisfait à cette condition et $y^2-2y\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+1$ sera diviseur de la proposée. Comme il y a une infinité d'arcs φ qui satisfont à notre équation; on peut prendre pour φ, $\varphi+2\pi$, $\varphi+4\pi$,.... $\varphi+2k\pi$ quel que soit l'entier k, ce qui donne pour la forme générale de nos diviseurs

$$y^2-2y\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+1=0;\text{ et }\cos\varphi=\frac{-B}{2\sqrt{(AC)}}.$$

Notre hypothèse comprise dans cette dernière équation est d'ailleurs légitime, puisque $B^2-4AC<0$ donne $\cos\varphi<1$.

Il sera d'ailleurs inutile de supposer $k>n$, car soit $k=nl+i$, l'arc $\frac{\varphi+2k\pi}{n}$ devient $2l\pi+\frac{\varphi+2i\pi}{n}$; le cosinus est le même que celui de l'arc qu'on a obtenu en faisant $k=i$; ainsi on retombe sur le même facteur.

Soit, par exemple, $x^6-2x^3+2=0$, on fait $x^6=2y^6$, et il vient $y^6-y^3\sqrt{2}+1=0$: or $\cos\varphi=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ indique (353) que $\varphi=150°$; on a donc pour $\frac{\varphi+2k\pi}{n}$ les arcs de $50°$... $183°\frac{1}{3}$... $316°\frac{2}{3}$; les coefficiens de nos facteurs sont donc $2\cos 50°=\sqrt{2}$, $-2\sin 83°,3333=-1,9318$; $2\sin 16°,6666=0,5176$. Ainsi, les facteurs de l'équation en y sont

$y^2-1,4142y+1=0$, $y^2+1,9318y+1=0$, $y^2-0,5176y+1=0$,

d'où on déduit aisément ceux de la proposée.

Soit de même $5x^6-2a^3x^3+5a^6=0$; faisons $x=ay$, et il viendra $y^6-\frac{2}{5}y^3+1=0$, d'où $\cos\varphi=\frac{1}{5}$, et $\varphi=87°,1812$; ainsi, les coefficiens de nos facteurs sont ...... $2\cos 29°,0604=1,7952$; $-2\sin 62°,3937=-1,6611$; enfin $-2\sin 4°,2729=-0,1341$ (*).

(*) Quand l'équation à trois termes n'a pas l'un de ses exposans double de l'autre, on emploie le procédé suivant. Soit $x^4-x+1=0$; on représentera l'une des racines par $x=\theta(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi)$, ce qu'on peut toujours supposer (note, 541, 1.), on a alors (580, 4°.),

$$x^4=\theta^4(\cos 4\varphi+\sqrt{-1}\sin 4\varphi) :$$

on substitue, et la transformée étant $P+Q\sqrt{-1}=0$, se partage (494) en deux autres $P=0$, $Q=0$. On a donc

$$\theta^4\cos 4\varphi-\theta\cos\varphi+1=0 \quad \text{et} \quad \theta^4\sin 4\varphi-\theta\sin\varphi=0.$$

Eliminant θ^4, il vient $\theta(\cos 4\varphi.\sin\varphi-\sin 4\varphi.\cos\varphi)+\sin 4\varphi=0$, d'où $\theta=\frac{\sin 4\varphi}{\sin 3\varphi}$, (356) ; substituant dans la 2de. de nos équations, on a pour déterminer φ

$$\frac{\sin^4 4\varphi}{\sin^3 3\varphi.\sin\varphi}=1.$$

A l'aide de quelques essais, on reconnoîtra bientôt entre quels degrés voisins tombe la valeur de φ ; puis par des fausses positions (148), un calcul assez court donnera φ avec toute l'exactitude des tables. Soit $\varphi=\frac{1}{2}q$, le 1er. membre devient $\frac{0}{1}$; $\varphi=34°$ donne $+0,99985$; les erreurs sont donc $+1$ et $-0,00015$: il est aisé de passer de là à $\varphi=33,9992$. Par suite $L\theta=\bar{1},926739$; donc

$$x=0,727136+0,430014\sqrt{-1}.$$

Le même calcul s'applique visiblement à $ax^m+bx+c=0$, forme à laquelle on peut ramener toute équation à trois termes, puisqu'on n'y suppose pas m entier. On a alors

* soit en prenant les autres valeurs de x, soit en recourant aux théorêmes précédens (526).

Pour $\sqrt[3]{(8+4\sqrt{5})}$, on a $a^2-b=-16$, et on fait $z=4$, $k=-1$, et $4x^3+3x-2=0$ d'où $x=\frac{1}{4}$ et $y=\frac{5}{4}$; enfin $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}}$ pour la racine cherchée.

De même, $\sqrt[3]{(-10+9\sqrt{-3})}$ donne $z=1$, $4x^3-21x+10=0$, d'où $x=2$, $=\frac{1}{2}$, $=-\frac{5}{2}$; par conséquent $2+\sqrt{-3}$, $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ pour les racines cherchées.

En faisant $\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})}=(x+\sqrt{y})\sqrt[n]{z}$, on auroit par le même procédé la racine n^e de $a+\sqrt{b}$: il est inutile de nous y arrêter.

II. *Equations du troisième degré.*

* 536. On peut toujours ramener l'équation du 3e. degré à la forme $x^3+px+q=0$, (502). Pour la résoudre, supposons $x=y+z$, c.-à-d., regardons l'inconnue comme la somme de deux autres, nous aurons

$$x^3=y^3+z^3+3yz\,(y+z)=y^3+z^3+3yzx\,;$$

d'où $$x^3-3yzx-(y^3+z^3)=0.$$

Comparant à $x^3+px+q=0$, on trouve

$$yz=-\tfrac{1}{3}p,\quad y^3+z^3=-q.$$

Telles sont les conditions auxquelles doivent satisfaire y et z, pour que leur somme soit x. Pour éliminer y et x, le cube de la 1re. équation étant $y^3z^3=-\frac{1}{27}p^3$, on voit que y^3 et z^3 sont deux quantités dont le produit est $-\frac{1}{27}p^3$, et dont la somme est $-q$; elles sont donc (137, 4°.)

les racines de l'équation du 2°. degré

$$t^2 + qt = \frac{1}{27}p^3, \ldots (1)$$

qu'on nomme la *Réduite*. Soient t et t' ses racines

$$-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2)}, \text{ on a } y^3 = t,\ z^3 = t'.$$

Désignons par 1, α et α^2 les trois racines cubiques de l'unité, ou $\alpha = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$, $\alpha^2 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$, (526) ; nous aurons

$$y = \sqrt[3]{t},\ = \alpha\sqrt[3]{t},\ = \alpha^2\sqrt[3]{t},$$
$$z = \sqrt[3]{t'},\ = \alpha\sqrt[3]{t'},\ = \alpha^2\sqrt[3]{t'}.$$

Pour en déduire x ou $y + z$, il ne faut pas ajouter indifféremment deux quelconques de ces valeurs, ce qui donneroit 9 racines : en effet, au lieu d'employer l'équation $yz = -\frac{1}{3}p$, on en a pris le cube pour faciliter le calcul, ce qui a triplé le nombre des racines : il convient donc de ne prendre que les valeurs de y et z dont le produit est réel et $= -\frac{1}{3}p$. Comme $\alpha^3 = 1$ et $\sqrt[3]{(tt')} = -\frac{1}{3}p$, on a

$$x = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t'},$$
$$x = \alpha\sqrt[3]{t} + \alpha^2\sqrt[3]{t'},$$
$$x = \alpha^2\sqrt[3]{t} + \alpha\sqrt[3]{t'}.$$

consultez à ce sujet le n°. 541, III.

1°. Si la *Réduite* a ses racines imaginaires, les trois valeurs de x semblent aussi imaginaires, ce qui est contraire à ce qu'on connoît (498, 3°.). Il convient d'expliquer ce paradoxe dont la difficulté a longtems arrêté les analystes, qui pour cela l'ont nommé *Cas irréductible ;* il a lieu quand p est négatif et qu'en outre $4p^3 > 27q^2$.

Les valeurs de t ont la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, et il s'agit

* d'en extraire la racine cubique. Or, sans exécuter les développemens de $(a \pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ par la formule de Newton (484), on voit aisément que les imaginaires ne doivent affecter que les puissances impaires de b, et que l'un d'eux se déduira de l'autre en changeant b en $-b$, c.-à-d., en prenant les termes imaginaires en signe contraire. Désignons donc $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ par $P+Q\sqrt{-1}=\sqrt[3]{t}$, nous aurons $(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=P-Q\sqrt{-1}=\sqrt[3]{t'}$, en sorte que la somme, ou $\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{t'}=2P$, est réelle; c'est la 1re. racine.

Si on retranche au contraire, on aura . . . . $\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{t'}=2Q\sqrt{-1}$. Or, mettons pour α et α^2 leurs valeurs dans les autres racines de x, nous trouverons

$$(2)\ldots -\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{t'})\mp\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{t'})\sqrt{-3}=-P\pm Q\sqrt{3}$$

quantité réelle. Ainsi *dans le cas irréductible les trois racines sont réelles*, précisément lorsqu'elles se présentent sous une forme imaginaire. Cela vient d'un vice de notre méthode : car, en supposant $x=y+z$, nous avons partagé l'inconnue en deux parties dont elle est la somme, et rien n'empêche que chacune ne soit imaginaire quoique cette somme soit réelle; il devient même prouvé que l'une de ces conditions emporte l'autre. Nos valeurs ne pouvant alors donner les racines, il faut recourir à un autre procédé.

2°. Si la réduite a ses racines t et t' réelles, la 1re. racine est visiblement réelle; quant aux deux autres, en les mettant sous la forme (2), on voit aisément qu'elles sont imaginaires. Cependant si $t=t'$, elles sont réelles, et on a

$$x=2\sqrt[3]{t},\quad x=-\sqrt[3]{t}\ \text{et}\ x=-\sqrt[3]{t},$$

ainsi la proposée a deux racines égales quand celles de * la réduite le sont aussi.

Soit $y^3-3y^2+12y-4=0$, on fait $y=x+1$, pour chasser le 2e. terme, et on a $x^3+9x+6=0$, d'où $p=9$ et $q=6$. La réduite est $t^2+6t=27$, d'où $t=3$, $t'=-9$, puis

$$x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}=-0,63783.$$

Les deux autres racines sont imaginaires, savoir....

$$\alpha\sqrt[3]{3}-\alpha^2\sqrt[3]{9},\ \alpha^2\sqrt[3]{3}-\alpha\sqrt[3]{9}.$$

On trouve enfin $y=0,36217$, etc.

Soit de même $x^3-3x-18=0$; la réduite est ... $t^2-18t+1=0$, d'où $t=9\pm4\sqrt{5}$: la racine cubique (535) est $\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$; la somme de ces deux valeurs est 3 : c'est la seule racine réelle de la proposée.

Pour $x^3-27x+54=0$, la réduite est .... $t^2+54t+729=0$, dont les deux racines sont -27; ainsi celles de x sont -6, 3 et 3.

De même $x^3-3x=2$, donne $t^2-2t+1=0$ ou $(t-1)^2=0$; donc $x=2$, $=-1$, $=-1$.

537. Revenons au cas irréductible. On sait (328, 528) * que r étant le rayon des tables et φ un arc quelconque, la 1re. des deux équations suivantes divise la 2e.

$$y^2-2y\cos\tfrac{1}{3}\varphi+r^2=0 \ldots\ldots (3),$$
$$y^6-2r^3y^3\cos\varphi+r^6=0 \ldots\ldots (4),$$

Au lieu de φ, on peut mettre $400^\circ+\varphi$ et $800^\circ+\varphi$. Or, on ramène l'équation $x^3-px-q=0$, à la forme 4 en faisant $x=m\left(y+\dfrac{n}{y}\right)$, m et n étant deux indéterminées : car en substituant et faisant $3m^2n=p$, on

* Enfin passant tout dans le 1er. membre, mettant x pour $y+z+u$, et comparant avec la proposée, on a pour déterminer les inconnues y, z et u dont x est la somme,

$$y^2+z^2+u^2=-\tfrac{1}{2}p,\ 8yzu=-q$$
$$y^2z^2+y^2u^2+z^2u^2=\tfrac{1}{16}p^2-\tfrac{1}{4}r$$

nous avons simplifié la dernière en mettant $-\frac{1}{2}p$ pour $y^2+z^2+u^2$. La 2e. donne $y^2z^2u^2=\frac{1}{64}q^2$: donc y^2, z^2 et u^2 sont trois inconnues dont le produit est $\frac{1}{64}q^2$, la somme $-\frac{1}{2}p$, et la somme de leurs produits 2 à 2, $\frac{1}{16}(p^2-4r)$. Elles sont donc (493) les trois racines de l'équation

$$t^3+\tfrac{1}{2}pt^2+\left(\frac{p^2-4r}{16}\right)t-\frac{q^2}{64}=0,$$

ou $\quad s^3+2ps^2+(p^2-4r)s-q^2=0,$

en faisant $t=\frac{1}{4}s$ pour simplifier. En résolvant cette équation, qu'on appelle *Réduite*, on aura trois racines s, s' et s''; d'où

$$y=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{s},\quad z=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{s'}\ \text{ et }\ u=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{s''}.$$

Comme $x=y+z+u$, il faut combiner ces résultats par addition, ce qui donne 8 solutions : mais nous savons que $yzu=-\frac{1}{8}q$, c.-à-d., que le produit $\sqrt{(ss's'')}$ est de signe contraire à q; d'ailleurs au lieu de cette équation, nous en avons employé le carré, ce qui a doublé le nombre des racines, et donné des résultats applicables quel que soit le signe de q : donc

1°. *Lorsque* q *est positif.* 2°. *Lorsque* q *est négatif.*

$x=\frac{1}{2}(\ \sqrt{s}\pm\sqrt{s'}\mp\sqrt{s''})$ $\quad x=\frac{1}{2}(\ \sqrt{s}\pm\sqrt{s'}\pm\sqrt{s''})$

$x=\frac{1}{2}(-\sqrt{s}\pm\sqrt{s'}\pm\sqrt{s''})$ $\quad x=\frac{1}{2}(-\sqrt{s}\mp\sqrt{s'}\pm\sqrt{s''})$

Voyez à ce sujet le n°. 541, V.

1°. *Si la réduite a ses trois racines réelles*, elles doivent

être toutes positives, ou bien il y en a une positive et deux négatives, car le dernier terme $-q^2$ est négatif, ce qui annonce au moins une racine positive (498, 2°.). Dans le 1er. cas $\sqrt{s}$, $\sqrt{s'}$ et $\sqrt{s''}$ sont réels, ainsi *les quatre racines de la proposée sont réelles. Elles sont imaginaires* au contraire dans le 2e. cas où deux des quantités s, s', s'' sont supposées négatives. Cependant si ces deux racines négatives étoient égales, la proposée auroit deux racines réelles et deux imaginaires.

2°. *Si la réduite ne tombe pas dans le cas irréductible*, elle n'a qu'une racine réelle s, qui de plus est positive; les deux autres s' et s'' sont de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$; de sorte que $\sqrt{s'} \pm \sqrt{s''} = \sqrt{(a+b\sqrt{-1})} \pm \sqrt{(a-b\sqrt{-1})}$. En élevant au carré le second membre, il devient . . . $2a \pm 2\sqrt{(a^2+b^2)}$; or ce dernier terme est $> 2a$; donc quel que soit le signe de a, l'une des valeurs. . . . $2a \pm 2\sqrt{(a^2+b^2)}$ est positive, l'autre est négative; prenant la racine, on voit que l'une des deux quantités $\sqrt{s'} \pm \sqrt{s''}$ est réelle et l'autre imaginaire. Donc *la proposée a deux racines réelles et deux imaginaires.*

Il est avantageux, sur-tout dans ce dernier cas, de n'employer qu'une seule racine s de la réduite : comme

$$(\sqrt{s'} \pm \sqrt{s''})^2 = s' + s'' \pm 2\sqrt{(s's'')},$$

$$s + s' + s'' = -2p, \quad \sqrt{(ss's'')} = q;$$

on a $$\sqrt{s'} \pm \sqrt{s''} = \sqrt{\left(-2p - s \pm \frac{2q}{\sqrt{s}}\right)}.$$

On trouve donc pour les quatre racines, quels que soient les signes de p, q, et r,

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{s} \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{4}s - \frac{q}{2\sqrt{s}}\right)},$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{s} \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{4}s + \frac{q}{2\sqrt{s}}\right)}.$$

Soit, par exemple, $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$, on a $p = -3$, $q = -42$, $r = -40$, et la réduite est... $s^3 - 6s^2 + 169s - 1764 = 0$: on trouve $s = 9$, qui est la seule racine réelle ; la proposée est donc dans le second cas ci-dessus, et on a $x = 4$, $x = -1$ et $x = -\frac{3 \pm \sqrt{-31}}{2}$.

Soit aussi $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$, comme $p = -25$, $q = 60$, $r = -36$, la réduite est $s^3 - 50s^2 + 769s - 3600 = 0$, dont les trois racines sont réelles et positives, $s = 9$, $= 25$, $= 16$. L'une suffit pour obtenir nos quatre racines réelles $x = 3$, $= 2$, $= 1$, $= -6$.

De même $x^4 - 20x^2 - 12x + 13 = 0$, donne pour réduite $s^3 - 40s^2 + 348s - 144 = 0$, dont l'une des racines réelles est $s = 12$, donc

$$x = \sqrt{3} \pm \sqrt{(7 + \sqrt{3})} \text{ et } x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{(7 - \sqrt{3})},$$

ou $x = 4,68709\ldots\ 0,56315\ldots\ -4,02725\ldots\ -1,22299$.

13. *Des Fonctions symétriques.*

539. On dit d'une fonction qu'elle est *Symétrique*, lorsqu'elle n'éprouve pas d'altération en y échangeant entre elles deux des lettres qui y entrent ; telles sont les suivantes $a^2 + b^2$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $ab + \sin a + \sin b$... qui demeurent les mêmes lorsqu'on met b pour a, et a pour b.

Soient a, b, c.... les racines d'une équation

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + \ldots + tx + u = 0 = X,$$

les coefficiens donnés p, q... sont des fonctions symétriques de $a\ b\ c$..., (493). Cherchons les sommes des diverses puissances des racines, et désignons-les ainsi

$$\int_1 = a + b + c \ldots \int_2 = a^2 + b^2 + c^2 \ldots \int_3 = a^3 + b^3 + c^3 \ldots \text{ etc.}$$

En divisant X par $x - a$, le quotient exact sera (100)

$$\begin{array}{r|r|r|l} x^{m-1}+a & x^{m-2}+a^2 & x^{m-3}\;+a^3 & x^{m-4}+a^{m-1}=0 \\ +p & +ap & +a^2p & \quad\;\; +a^{m-2}p \\ & +\;q & +a\,q & \quad\;\; +a^{m-3}q \\ & & +r & \quad\;\; +a^{m-4}r \text{ etc.} \end{array}$$ *

En changeant tour-à-tour a en b, c... on a les quotiens de X divisé par $x-b$, $x-c$... Ajoutons ces m quotiens et n'ayons égard qu'aux coefficiens.

1°. Celui de x^{m-2} sera $(a+p)+(b+p)+(c+p)+\ldots$ ou $a+b+c+\ldots+mp=f_1+mp$.

2°. Pour x^{m-3} on devra de même ajouter à a^2+ap+q autant de quantités semblables en b c... qu'il est nécessaire pour que cette fonction devienne symétrique ; ce qui donne $a^2+b^2+c^2+\ldots$ ou f_2 d'une part ; ...... $ap+bp+cp+\ldots.$ ou pf_1 de l'autre ; et enfin mq. Ainsi on a f_2+pf_1+mq.

3°. Pour x^{m-4}, $a^3+a^2p+aq+r$ donne $f_3+pf_2+qf_1+mr$. Et ainsi de suite.

Cela posé, 1°. le premier de nos quotiens $\frac{X}{x-a}$ ayant pour racines b, c..., le coefficient $a+p$ ne diffère de son correspondant dans la proposée qu'en ce que, dans la somme des racines prises en signe contraire, $-a$ n'y doit point entrer. Il faut en dire autant de $-b$, dans le coefficient de x^{m-2}, pour le 2°. quotient $\frac{X}{x-b}$, etc... Dans la somme de ces divers quotiens, notre coefficient seroit donc mp, si chaque racine n'étoit omise à son tour ; cette somme est donc............ $mp+(a+b+c\ldots)$ ou $mp-p$; valeur qui, égalée à $mp+f_1$, donne $f_1+p=0$.

2°. Le coefficient de x^{m-3} dans le quotient $\frac{X}{x-a}$ est la somme des produits 2 à 2 de b, c...; il seroit

donc le même que dans la proposée, ou q, si chaque produit ab, ac... où entre a, y étoit compris. Celui du 2d. quotient $\frac{X}{x-b}$ est de même q moins les produits 2 à 2 formés avec b, c, etc.... La somme de ces coefficiens seroit donc mq, si chaque produit 2 à 2 de a, b, c... n'étoit omis 2 fois; ab, par exemple, manquant dans le 1er. et le 2e. quotient. La somme est donc $mq-2q$, qui, égalée à celle ci-dessus, donne $f_2+pf_1+2q=0$.

3°. Le coefficient de x^{m-4} est formé des produits 3 à 3, pris en signe contraire, des racines b, c, d...; ils sont donc les mêmes que dans la proposée, ou r, excepté que $-abc-acd$... n'entre pas ici. De même pour $\frac{X}{x-b}$,... Donc la somme de ces coefficiens seroit mr, si chaque produit 3 à 3 ne se trouvoit omis 3 fois. On a donc $mr-3r$; d'où $f_3+pf_2+qf_1+3r=0$.

Et ainsi de suite. Donc

$$f_1+p=0\,;\; f_2+pf_1+2q=0\,;\; f_3+pf_2+qf_1+3r=0\,;\text{ etc.}$$
$$f_{m-1}+pf_{m-2}+qf_{m-3}+rf_{m-4}+\ldots+(m-1)t=0\ldots(1)$$

La 1re. de nos équations donne f_1; la 2e. f_2; la 3e. f_3, etc. Pour trouver f_m, f_{m+1},... multiplions X par x^n, et mettons tour-à-tour a b c... pour x, nous aurons

$$a^{m+n}+pa^{m+n-1}+qa^{m+n-2}+\ldots+ua^n=0$$
$$b^{m+n}+pb^{m+n-1}+qb^{m+n-2}+\ldots+ub^n=0,\text{ etc.}$$

Ajoutant ces m équations, on trouve

$$f_{m+n}+pf_{m+n-1}+qf_{m+n-2}+\ldots+uf_n=0.$$

En faisant $n=0$ et $n=k-m$, k étant un nombre entier positif ou négatif quelconque, il vient, à cause de $f_0=a^0+b^0+c^0+\ldots=m$,

$$f_m + pf_{m-1} + qf_{m-2} + rf_{m-3} + \ldots + mu = 0 \ldots$$ *

$$f_k + pf_{k-1} + qf_{k-2} + rf_{k-3} + \ldots + uf_{k-m} = 0 \ldots (2)$$

Soit proposée, par exemple, l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, où $p = 0$, $q = -2$, $r = -5$, on trouve o, 4, 15, 8, 50, 91... pour $f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5 \ldots$

De même $x^m - 1 = 0$, donne zéro pour $f_1\ f_2\ f_3 \ldots$ enfin $f_m = m$; de sorte qu'en désignant (526) par $\alpha\ \alpha\ \alpha^2\ \alpha^3 \ldots \alpha^{m-1}$ les valeurs de $\sqrt[m]{1}$, on a

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-1} = 0, \qquad 1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^{2m-2} = 0$$
$$1 + \alpha^3 + \alpha^6 + \ldots + \alpha^{3m-3} = 0, \text{ etc. } 1 + \alpha^m + \alpha^{2m} + \ldots = m.$$

Et en effet, cela résulte évidemment de ce que les racines α, α^2,... satisfont à l'équation $1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1} = 0$, et de ce que $x^m = 1$.

Remarquons que pour former la fonction symétrique dont $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ est un terme, et que nous désignerons ainsi $[a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots]$, il faut former tous les arrangemens possibles des m lettres $a\ b\ c\ d \ldots p$ à p, puis affecter la 1re. lettre de l'exposant α, la 2e. de β, etc.... ce qui prouve que le nombre des termes de la fonction est le même que celui des arrangemens des m lettres...... $a\ b\ c \ldots p$ à p, (476). *

Si deux exposans sont égaux, tel que $\alpha = \beta$, alors il ne faut prendre que la moitié du résultat, parce que chaque terme sera répété 2 fois. Si trois exposans sont égaux, on prendra le 6e., et il y a ici la même différence qu'entre les combinaisons et les permutations. V. no. 478.

540. Non-seulement on sait trouver les valeurs de $f_1 f_2 \ldots$ sans connoître $a\ b\ c \ldots$; mais encore *on peut exprimer à l'aide des coefficiens* p q r... *toute fonction symétrique* *

* *des racines.* Pour démontrer ce théorême, prenons pour exemple les racines a, b, c, de l'équation du 3ᵉ. degré.

Formons la fonction $[a^\alpha b^\beta]$; pour cela, multiplions $a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = \int_\alpha$ par $a^\beta + b^\beta + c^\beta = \int_\beta$; il viendra

$$\int_\alpha \int_\beta = a^{\alpha+\beta} + b^{\alpha+\beta} + c^{\alpha+\beta} + (a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha + a^\alpha c^\beta \ldots)$$

d'où $$[a^\alpha b^\beta] = \int_\alpha \int_\beta - \int_{\alpha+\beta} \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De même pour former la fonction $[a^\alpha b^\beta c^\gamma]$, multiplions cette équation par $a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma = \int_\gamma$; en développant le calcul, on pourra mettre le produit sous la forme

$$[a^{\alpha+\gamma} b^\beta] + [a^{\beta+\gamma} b^\alpha] + [a^\alpha b^\beta c^\gamma] = \int_\alpha \int_\beta \int_\gamma - \int_\gamma \int_{\alpha+\beta}.$$

Or les deux 1ᵉʳˢ. termes sont des fonctions symétriques du produit de 2 lettres, et la formule (3) donne leurs valeurs; $\int_{\alpha+\gamma}\int_\beta - \int_{\alpha+\beta+\gamma}$ pour l'une; et $\int_{\beta+\gamma}\int_\alpha - \int_{\alpha+\beta+\gamma}$ pour l'autre. On tire donc

$$[a^\alpha b^\beta c^\gamma] = \int_\alpha \int_\beta \int_\gamma - \int_{\alpha+\beta}\int_\gamma - \int_{\alpha+\gamma}\int_\beta - \int_{\beta+\gamma}\int_\alpha + 2\int_{\alpha+\beta+\gamma} \quad (4)$$

Ce calcul, dont le résultat est d'ailleurs applicable aux équations de tous les degrés, montre le procédé qu'il faut suivre pour trouver dans tout autre cas les fonctions symétriques des racines : nous n'avons affecté les divers termes d'aucun coefficient, parce qu'il seroit facteur commun, ce qui n'ajouteroit rien à la difficulté. Enfin si la fonction étoit fractionnaire, en réduisant au même dénominateur, la fraction résultante auroit pour chacun de ses deux termes une fonction symétrique.

C'est ainsi que $\left[\frac{a}{b}\right]$, qui équivaut à..........
$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$, est $=\frac{[a^2b]}{abc}$.

541. Nous mettrons ici quelques exemples des usages de la théorie que nous venons d'exposer. *

I. *Résolution des équations numériques.* Puisque.... $f_k = a^k + b^k + c^k$.... plus a et k seront grands par rapport à $b, c, \ldots$ et moins il y aura d'erreur à supposer $f_k = a^k$, et aussi $f_{k-1} = a^{k-1}$; donc a étant la plus grande des racines, on calculera la suite des nombres $f_1\, f_2\, f_3 \ldots$ et le quotient de chacun, divisé par celui qui le précède, approchera de plus en plus de la plus grande des racines à mesure qu'on prendra des nombres plus éloignés (*). *

On pourra donc trouver la plus grande des racines, et même par la suite la plus petite (504).

II. *Equation au carré des différences des racines.* Les équations (1) renversées donnent *

$$p = -f_1 \quad q = -\tfrac{1}{2}(pf_1 + f_2) \quad r = -\tfrac{1}{3}(qf_1 + pf_2 + f_3) \text{ etc.}$$

On peut donc composer une équation du degré m, con-

(*) Les racines imaginaires qui pourroient exister dans la proposée, modifient ce théorême; car elles ont la forme $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ (519) : faisant $\alpha = \lambda \cos \varphi$ et $\beta = \lambda \sin \varphi$, d'où $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$ et $\frac{\beta}{\alpha} = \text{tang}\, \varphi$; nos racines prennent la forme $\lambda(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})$. On a donc ($K$, 580)

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^k = \lambda^k(\cos k\varphi + \sin k\varphi.\sqrt{-1})$$
$$(\alpha - \beta\sqrt{-1})^k = \lambda^k(\cos k\varphi - \sin k\varphi.\sqrt{-1})$$

en sorte que nos racines produisent dans f_k des termes de la forme $2\lambda^k \cos k\varphi$. Ainsi pourvu que λ ou $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$ soit moindre que la plus grande racine réelle a, le théorême ci-dessus sera encore vrai.

* noissant la somme des puissances 1, 2, 3... m de ses racines.

Soit l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$, proposons-nous de trouver l'équation au carré des différences de ses racines a, b, c; soit

$$z^3+Pz^2+Qz+R=0$$

cette équation ; il s'agit de trouver P, Q et R : ses racines sont $(a-b)^2$, $(a-c)^2$ et $(b-c)^2$. Or

1°. leur somme S_1, est $2\,(s_2-ab-ac-bc)$; d'où

$$S_1=2s_2-2q.$$

2°. La somme S_2 de leurs carrés, $(a-b)^4+$ etc., est $2s_4-4\,[a^3b]+6\,[a^2b^2]$: or la formule (3) donne $s_3s_1-s_4$ et $\frac{1}{2}\,(s_2^2-s_4)$ pour valeurs de $[a^3b]$ et $[a^2b^2]$; donc

$$S_2=3s_4-4s_3s_1+3s_2^2.$$

3°. La somme S_3 des cubes se réduit à

$$S_3=3s_6-6s_5s_1+15s_4s_2-10s_3^2.$$

On connoîtra donc S_1 S_2 et S_3 en fonction de p, q et r. Or pour appliquer les formules ci-dessus à $z^3+Pz^2...=0$, il faut y changer p, q et r en P, Q et R : elles deviennent

$$P=-S_1,\quad Q=-\tfrac{1}{2}(PS_1+S_2),\quad R=-\tfrac{1}{3}(QS_1+PS_2+S_3)\ ;$$

et comme S_1, S_2, S_3 sont connus, il ne s'agit plus que d'en substituer les valeurs.

Si, par exemple, la proposée manque de 2^d. terme, on a $p=0$, $x^3+qx+r=0$, d'où

$$P=6q,\quad Q=9q^2,\quad R=27r^2+4q^3.$$

C'est ainsi que pour $x^2-2x-5=0$, on obtient

$z^3 - 12z^2 + 36z + 643 = 0$ pour équation au carré des différences (de même que p. 55).

On trouve les formules générales pour le 3e., le 4e. et 5e. degrés dans la *Résolution numérique des équations* de Lagrange, nos. 38, 39, et note III.

III. *Second degré.* L'équation $x^2 + px + q = 0$ ayant a et b pour racines, on a $a + b = -p$ et $ab = q$. Cherchons la valeur z de la quantité $a + mb$, m étant un nombre quelconque : les relations $a + b = -p$ et $a + mb = z$ feront ensuite connoître a et b. Mais le calcul destiné à donner $a + mb$, devant donner aussi $b + ma$, on est conduit à cette autre équation du 2d. degré

$$\{z - (a + mb)\}\{z - (b + ma)\} = 0.$$

On ne peut donc tirer parti de ce calcul qu'autant qu'on attribuera à l'indéterminée m, une valeur telle que l'équation en z manque de 2d. terme. En égalant son coefficient à zéro, il vient

$$a+b+m(a+b)=0, \text{ d'où } m=-1 \text{ et } z^2=a^2+b^2-2ab;$$

Or $ab = q$, $a^2 + b^2 = S_2 = p^2 - 2q$; donc on a

$$z^2 = p^2 - 4q \text{ d'où } a - b = \pm\sqrt{(p^2 - 4q)}$$

de là et de $a + b = -p$, on tire pour a et b les valeurs connues (138).

IV. *Troisième degré.* a, b et c étant les racines de $x^3 + px + q = 0$, on a $a + b + c = 0$, (502). Parmi les six valeurs dont est susceptible la fonction $[a+mb+nc]$, m et n étant quelconques, désignons-en deux par z' et z''. Si ces deux quantités étoient connues, l'élimination donneroit aisément a, b et c : mais la recherche de z' et z'' doit engager, dans une équation du 6e. degré, ce qui rendroit ce procédé inutile, si on ne pouvoit déterminer les

* arbitraires m et n, de manière à donner à cette équation la forme $z^6 + Az^3 + B = 0$. Alors en posant $z^3 = u$, on auroit

$$u^2 + Au + B = 0, \text{ d'où } u = z^3 = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B)};$$

les racines cubiques de ces deux racines donneroient ensuite deux des valeurs z' et z'' de la fonction $[a+mb+nc]$, telles que

$$z' = a + mb + nc, \quad z'' = a + mc + nb,$$

et le calcul ne présenteroit plus de difficultés.

Il reste donc à savoir si l'on peut prendre m et n tels que la réduite ait la forme $z^6 + Az^3 + B = 0$, c.-à-d. tels que z' et z'' étant deux des valeurs de z, les quatre autres soient $\alpha z'$, $\alpha^2 z'$, $\alpha z''$ et $\alpha^2 z''$; 1, α et α^2 désignant les trois racines de $y^3 - 1 = 0$, (526). Pour nous assurer si cela est possible, posons

$$\alpha z' = b + mc + na, \quad \alpha z'' = c + mb + na,$$
$$\alpha^2 z' = c + ma + nb, \quad \alpha^2 z'' = b + ma + nc.$$

Pour que ces suppositions puissent se réaliser, il faut prendre m et n tels que ces 4 équations soient satisfaites, quels que soient a, b et c. En mettant ici pour z' et z'' leurs valeurs ci-dessus, ordonnant par rapport à a, b et c, puis enfin égalant à zéro leurs coefficiens respectifs (557), chaque équation en donnera ainsi trois. Or on remarquera qu'elles s'accorderont entre elles en faisant $m = \frac{1}{\alpha} = \alpha^2$, $n = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha$: ce qui prouve que si on prend les trois racines cubiques de l'unité pour coefficiens de a, b et c dans $[a + mb + nc]$, l'équation qui a pour racines les six valeurs de cette fonction aura la forme $z^6 + Az^3 + B = 0$. On aura donc

$z' = a + \alpha c + \alpha^2 b$, $z'' = a + \alpha b + \alpha^2 c$, $a + b + c = 0$, *
et comme $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, on trouve

$c = \frac{1}{3}(\alpha^2 z' + \alpha z'')$, $b = \frac{1}{3}(\alpha z' + \alpha^2 z'')$, $a = \frac{1}{3}(z' + z'')$.

Maintenant il ne reste plus qu'à exprimer z' et z'' en fonction de p et q; ce qui revient à trouver les valeurs de A et B, et à les substituer dans $z^3 = -\frac{1}{2}A \pm$ etc. Les six valeurs de la fonction $[a + \alpha c + \alpha^2 b]$ ne produisant que trois cubes, z'^3 et z''^3, notre équation $z^6 + Az^3 + B = 0$, est

$$\{z^3 - (a + \alpha c + \alpha^2 b)^3\}\{z^3 - (a + \alpha b + \alpha^2 c)^3\} = 0,$$

d'où $-A = (a + \alpha c + \alpha^2 b)^3 + (a + \alpha b + \alpha^2 c)^3$

$$B = \{(a + \alpha c + \alpha^2 b) \times (a + \alpha b + \alpha^2 c)\}^3$$

Développant le calcul, et mettant, chaque fois que l'occasion se présente, 1 pour α^3, α pour α^4, α^2 pour α^5,... on trouve d'abord

$$(a + \alpha c + \alpha^2 b)^3 = \int_3 + 6abc + 3\alpha(a^2c + ab^2 + bc^2) + 3\alpha^2(a^2b + ac^2 + b^2c),$$

changeant ici b en c, et c en b, puis ajoutant le résultat à celui-ci, il viendra

$$-A = 2\int_3 + 12\,abc + 3\,[a^2b]\,(\alpha + \alpha^2),$$

et comme $\alpha + \alpha^2 = -1$, $[a^2b] = \int_2\int_1 - \int_3$ (par la formule 3), $abc = -q$, $\int_1 = 0$, $\int_2 = -2p$, $\int_3 = -3q$, on obtient enfin

$$A = -2\int_3 + 12q + 3(\int_2\int_1 - \int_3) = 27q$$

$$B = (a^2 + b^2 + c^2 - ac - ab - bc)^3 = (\int_2 - p)^3 = -27p^3,$$

ainsi $\quad u = z^3 = 27\,\{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2)}\}$

Les racines cubiques de ces deux quantités sont z' et z''; en les substituant ci-dessus, on trouve pour a, b et c les valeurs connues (536).

* V. *Quatrième degré.* Les racines de $x^4+px^2+qx+r=0$ étant a, b, c et d, on a $a+b+c+d=0$. Cherchons, pour imiter le même procédé, trois des 24 valeurs de la fonction $[a+lb+mc+nd]$, ou plutot 3 des six valeurs de $[a+b+m(c+d)]$. On évite même encore la difficulté du 6e. degré, en faisant $m=-1$, car trois des valeurs de $[a+b-c-d]$ sont égales et de signe contraire aux trois autres; d'où il suit que $[(a+b-c-d)^2]$ n'a que trois valeurs, savoir, $(a+b-c-d)^2$, $(a+c-b-d)^2$ et $(a+d-b-c)^2$. Or

$$(a+b-c-d)^2=(a+b+c+d)^2-4(ac+ad+bc+bd)$$

qui se réduit à $-4p+4(ab+cd)$, à cause de $p=[ab]$ et de $a+b+c+d=0$. Changeons ici b en c, puis en d, et réciproquement; enfin faisons, pour abréger, $z+4p=4u$, nous aurons pour facteurs de l'équation destinée à donner les trois valeurs dont il s'agit

$$u-(ab+cd),\quad u-(ac+bd),\quad u-(bc+ad).$$

Cela posé, 1°. la somme des 2^{ds}. termes est $-p$.

2°. Celle des produits 2 à 2 est la fonction $[a^2bc]$, qui est $=\frac{1}{2}(f_2f_1-2f_3f_1-f_2^2+2f_4)$, d'après l'observation faite p. 87, et le n°. 540. Substituant pour $f_1 f_2 \ldots$ leurs valeurs, on obtient $[a^2bc]=-4r$.

3°. Le produit des seconds termes des facteurs est $abcd\times f_2+[a^2b^2c^2]$ ou

$$rf_2+\tfrac{1}{6}(f_2^3-3f_4f_2+2f_6)=-4pr+q^2,$$

on a donc $\quad u^3-pu^2-4ru+4pr-q^2=0$

ou plutôt $\quad z^3+8pz^2+16z(p^2-4r)-64q^2=0$

en mettant $\frac{1}{4}z+p$ pour u. Une fois connues les trois racines z', z'' et z''' de cette réduite, on obtient aisément

$$a + b - c - d = \sqrt{z'},$$
$$a + c - b - d = \sqrt{z''},$$
$$a + d - b - c = \sqrt{z'''},$$

d'où on tire les racines connues (538).

VI. *Elimination.* Soient les équations

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + p'x + q' = 0;$$

p, q, p' et q' contenant une autre inconnue y. En résolvant la 2e. par rapport à x, on auroit en y deux valeurs a et b, qui, mises pour x dans la 1re., donneroient $a^2 + pa + q = 0$, $b^2 + pb + q = 0$. Enfin on tireroit de là les valeurs de y correspondantes à celles a et b de x, si celles-ci étoient connues. L'équation qui contient toutes les valeurs de y, et à laquelle conduira l'élimination de x, doit comprendre toutes ces diverses valeurs; de sorte qu'elle sera identiquement nulle, lorsqu'on les substituera pour y. Cette équation *finale* admet donc pour facteurs $a^2 + pa + q$ et $b^2 + pb + q$, ou plutôt elle est le produit de ces trinomes, puisque toute autre valeur de y seroit étrangère au problême. Cette équation finale en y est donc

$$a^2b^2 + pab(a+b) + p^2ab + (a^2+b^2)q + pq(a+b) + q^2 = 0,$$

a et b sont ici engagés symétriquement, et on trouve $ab = q'$, $a + b = -p'$, $a^2 + b^2 = f_2 = p'^2 - 2q'$. D'où,

$$(q - q')^2 + (pq' - p'q)(p - p') = 0.$$

comme ci-devant (509).

Ce raisonnement s'applique à tous les degrés. Soient $X = 0$, $X' = 0$ deux équations en x et y. Désignons par a, b, c... les valeurs inconnues de x tirées de $X' = 0$, en fonction des coefficiens p', q'... En substituant ces racines dans $X = 0$, on a autant d'équations $A = 0$,

$B = o$, $C = o$.... sans x. Or l'équation finale en y doit s'accorder avec tous ces résultats; elle est par conséquent leur produit $ABC\ldots = o$.

On mettra donc dans X les lettres $a\,b\,c\ldots$ pour x, et on fera le produit des résultats : dans ce produit, $a\,b\,c\ldots$ entreront de la même manière, de sorte qu'on aura des fonctions symétriques de ces quantités, fonctions faciles à exprimer à l'aide des coefficiens p', q'.... de $X' = o$. Ainsi l'élimination de x sera opérée.

Désignons par m le plus grand nombre qu'on obtienne pour somme des exposans de x et y, dans chacun des termes de $X' = o$; en sorte que y n'entre pas dans le coefficient de x^m : que y soit au plus au 1er. degré dans le coefficient p' de x^{m-1} : au 2^d. dans q', etc.; m est ce qu'on nomme le degré de X'. Soit de même n le degré de X.

Or puisque f_1 ne contient que p', f_2 que q', etc., f_1 n'excédera pas le 1er. degré en y, f_2 le 2^d., f_3 le 3e...

Dans toute fonction $[a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots]$, le degré de y ne pourra donc excéder le nombre $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$. qui exprime le degré de chaque terme. Or a, b, c... ne peuvent entrer dans le produit $ABC\ldots$ au plus qu'au degré mn : lorsque les assemblages symétriques de a, b, c... seront remplacés dans ce produit par leurs valeurs en fonction des coefficiens p', q'... on n'aura donc pas pour y d'exposant au-dessus de mn.

De là résulte ce théorème, que *le degré de l'équation finale ne peut excéder le produit des nombres qui expriment les degrés des équations proposées*. *V.* un Mémoire de *Poisson*, 11e. Jour. polyt., p. 199, où ce théorème est démontré d'une manière analogue, pour un nombre quelconque d'équations et d'inconnues.

CHAPITRE III.

FRACTIONS CONTINUES.

1. *Propositions générales.*

542. LORSQU'ON veut obtenir la valeur approchée d'une quantité x, le moyen le plus simple est de chercher d'abord l'entier a qui en approche le plus, de sorte que x' étant >1, on ait $x=a+\frac{1}{x'}$; raisonnant de même pour x', on fera $x'=b+\frac{1}{x''}$, b étant le plus grand entier contenu dans x', et par conséquent $x''>1$; de même $x''=c+\frac{1}{x'''}$, ... etc. : substituant, on trouve

$$x=a+\frac{1}{x'} \qquad x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}+\text{etc.}}}} \qquad (A)$$

$$x'=b+\frac{1}{x''}$$

$$x''=c+\frac{1}{x'''}\ldots \text{etc.}$$

C'est ce qu'on appelle une *Fraction continue*. Prenons dans la série des valeurs de x x' x''... trois quantités y, z, u, qui aient un rang indéterminé, de sorte qu'on ait

$$\ldots\ldots y=m+\frac{1}{z},\ z=n+\frac{1}{u},\ u=p+\frac{1}{v}\ldots$$

m n p étant les plus grands nombres entiers contenus dans y, z et u. Or si, négligeant v, on suppose $u=p$, il est évident que par là on rendra alternativement...

$u\,z\,y \ldots x'' \; x'$ et x trop petits et trop grands; d'où il suit que la fraction continue, ainsi limitée au terme p, sera $>$ ou $<x$, suivant que p y sera de rang pair ou impair. Donc si on la borne successivement au 1er., 2e., 3e... rang, les résultats seront tour-à-tour $<$ et $>x$. Donc x sera compris entre deux résultats consécutifs quelconques. Les deux premiers seront $\frac{a}{1}$, $a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$; pour obtenir le 3e. $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$, il est visible qu'il suffit de changer b en $b+\frac{1}{b}$ dans $\frac{ab+1}{b}$; on trouve $\frac{abc+c+a}{bc+1}$. De même en changeant c en $c+\frac{1}{d}$, on aura pour la 4e. $\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+b+d}$.

En général, soient $\frac{M}{M'}$, $\frac{N}{N'}$, $\frac{P}{P'}$, trois fractions produites en bornant la fraction continue tour-à-tour à $y=m$, $z=n$ et $u=p$; il est clair que si on change m dans $\frac{M}{M'}$ en $m+\frac{1}{n}$, on aura $\frac{N}{N'}$. Représentons par Lm et $L'm$ les termes de M et M' où m est facteur, il faudra donc remplacer m dans M et M', d'abord par m (ce qui n'y change rien), puis par $\frac{1}{n}$, ce qui donne $\frac{L}{n}$ et $\frac{L'}{n}$. Ainsi les termes N et N' sont $M+\frac{L}{n}$ et $M'+\frac{L'}{n}$; donc $\frac{N}{N'}=\frac{Mn+L}{M'n+L'}$.

De même pour déduire $\frac{P}{P'}$ de $\frac{N}{N'}$, on y mettra $n+\frac{1}{p}$ pour n; on devra donc laisser N et N' tels qu'ils sont,

pour équivaloir à la substitution de n pour n; et ensuite le changement de n en $\frac{1}{p}$ donnera $\frac{M}{p}$ et $\frac{M'}{p}$; donc on aura $N+\frac{M}{p}$, $N'+\frac{M'}{p}$, d'où

$$\frac{P}{P'}=\frac{Np+M}{N'p+M'},\ P=Np+M,\ P'=N'p+M';$$

de sorte que $\frac{L}{L'}$ est la fraction qui précède $\frac{M}{M'}$ dans notre série. Nous connoissons donc la loi qui les gouverne.

543. Voici diverses conséquences qu'on en tire.

1°. En éliminant p entre nos deux dernières équations, il vient $M'N-MN'=-(P'N'-PN')$; ces deux membres sont les numérateurs des différences entre... $\frac{M}{M'}$, $\frac{N}{N'}$ et $\frac{P}{P'}$; si donc on désigne $M'N-MN'$ par k, on aura tour-à-tour $+k$ et $-k$ pour le numérateur de la différence entre deux fractions successives, en ôtant toujours chacune de celle qui la suit. Or les deux 1res. étant a et $a+\frac{1}{b}$, cette différence est $\frac{1}{b}$, dont le numérateur est 1; ainsi $k=1$, et $P'N-PN'$ est $+1$ ou -1, suivant que $\frac{N}{N'}$ est $>$ ou $<$ $\frac{P}{P'}$. Donc *les produits des termes en croix de deux fractions successives ont l'unité pour différence.*

2°. $P'N-PN'=\pm 1$ prouve que P' et P n'ont pas de facteur commun, puisqu'il diviseroit le 2e. membre $=1$: de sorte que $\frac{P}{P'}$ est irréductible. On en dira autant de P' et N', ainsi que de P et N.

3°. La valeur ci-dessus de $\frac{P}{P'}$ est $>$ ou $< x$, parce qu'elle suppose $u = p$; mais si on remplace p par u, on a

$$x = \frac{Nu + M}{N'u + M'}.$$

4°. Puisque $\frac{P}{P'} - \frac{N}{N'} = \frac{\pm 1}{P'N'}$, et que de plus x est compris entre $\frac{N}{N'}$ et $\frac{P}{P'}$, l'erreur δ qu'on commet en prenant l'une de ces fractions pour x, est moindre que $\frac{1}{P'N'}$; et comme $P' > N'$, on a aussi $\delta < \frac{1}{N'^2}$; ainsi *l'erreur de chaque fraction va en décroissant, et elle est moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur.* C'est pour cela qu'on donne le nom de *Convergentes* à ces fractions consécutives.

5°. Soit $\frac{q}{q'}$ une fraction plus approchée de x que ne l'est $\frac{P}{P'}$, ce qui suppose que $\frac{N}{N'}$, $\frac{q}{q'}$, $\frac{P}{P'}$, sont ainsi disposés par ordre de grandeurs croissantes ou décroissantes; la différence entre les deux 1res. devant être moindre que celle des extrêmes, on a

$$\frac{N'q - Nq'}{N'q'} \text{ ou } \frac{Nq' - N'q}{N'q'} < \frac{1}{P'N'},$$

or, le numérateur du 1er. membre est > 1, puisque $N\ N'\ q\ q'$ sont des nombres entiers; ainsi on a *à fortiori*,

$$\frac{1}{N'q'} < \frac{1}{N'P'}, \text{ ou } q' > P':$$

donc $q > P$, et *chacune de nos fractions approche plus de* x, *que toute autre qui seroit conçue en termes plus simples.*

6°. Soient $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \ldots \frac{N}{N'}, \frac{P}{P'}$, les fractions successives provenues d'une fraction continue terminée et dont la valeur totale est par conséquent $x = \frac{P}{P'}$; on a

$$\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'}, \quad \frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{C'B'},$$
$$\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{C'D'} \ldots \frac{P}{P'} - \frac{N}{N'} = \frac{\pm 1}{P'N'}.$$

En ajoutant ces équations, leurs 1ers. membres se détruisent; il reste seulement $-\frac{A}{A'}$ dans la 1re., et $\frac{P}{P'}$ dans la dernière; on trouve donc

$$x = \frac{P}{P'} = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} - \frac{1}{D'E'} \ldots \pm \frac{1}{P'N'}$$

série qui ne dépend que des dénominateurs A', B'..., P', qu'on sait trouver, et dont les termes vont sans cesse en décroissant.

Lorsque la valeur de x est irrationnelle, elle ne peut plus s'exprimer exactement, et la fraction continue aussi bien que la série précédente deviennent infinies; mais pour cela, les propriétés démontrées ne cessent pas d'avoir lieu. Nous allons les appliquer à divers exemples.

2. *Équations déterminées du premier degré.*

544. Toute équation du 1er. degré est de la forme $kx = l$. Il s'agit de développer x en fraction continue. Pour mieux analyser cette application, nous prendrons un exemple particulier. Soit $x = \frac{9752}{2645}$; on a d'abord ...

$x = 3 + \frac{1817}{2645}$, et, divisant haut et bas par 1817,

$x = 3 + \frac{1}{x'}$, en faisant $x' = \frac{2645}{1817}$; de même........

$x' = 1 + \frac{828}{1817} = 1 + \frac{1}{x''}$, en supposant $x'' = \frac{1817}{828}$;

ensuite $x'' = 2 + \frac{1}{x'''}$, $x''' = 5 + \frac{1}{7}$: d'où

$$x = \frac{9752}{2645} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}}}$$

9752	2645	1817	828	161	23
	3	1	2	5	7

$\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{11}{3}, \frac{59}{16}, \frac{424}{115}$ 424 115 79 36 7 1

Nous avons indiqué ici les divers calculs, et on voit que *la fraction continue a pour termes successifs les quotiens que produit l'opération du commun diviseur, entre les deux termes de la fraction qu'elle représente*, ce qui donne un moyen simple de convertir $\frac{l}{k}$ en fraction continue.

Lorsqu'on borne tour-à-tour la fraction continue à son 1er., 2e., 3e... terme, on obtient $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{59}{16}$ et $\frac{424}{115}$; et on sait que ces résultats sont de plus en plus approchés alternativement par défaut et par excès, et réduits à leur expression la plus simple; enfin qu'ils se déduisent les uns des autres : par exemple, $\frac{11}{3}$ s'obtient par ce calcul

$2 \times 4 + 3 = 11$, $2 \times 1 + 1 = 3$; de même...........

$11 \times 5 + 4 = 59$, $3 \times 5 + 1 = 16$ donnent $\frac{59}{16}$.

Au lieu de ce procédé qui suppose connues les fractions qui précèdent, on peut remonter de fraction en

fraction; ainsi pour $3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$ on réduira $1+\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{2}$, et, comme 1 est divisé par $1+\frac{1}{2}$, on trouve $3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$. En opérant pour la fraction continue toute entière, on retrouve sa valeur irréductible $\frac{424}{115}$. Le moyen que nous indiquons ici de réduire à la plus simple expression, ou de trouver la valeur d'une partie quelconque de la fraction continue, revient évidemment au principe déja indiqué (36, 4°.). Si donc on veut avoir la fraction qui répond aux quatre quotiens 3, 1, 2 et 5, on mettra 1 sous 5, on dira $1\times5=5$ qu'on portera sous le 2; puis...... $2\times5+1=11$ qu'on mettra sous 1; $11\times1+5=16$, $16\times3+11=59$; d'où $\frac{59}{16}$.

3,	1,	2,	5	
59.	16.	11	5.	1.

En retranchant chaque fraction successive de celle qui la suit, on a $+1$ et -1 tour-à-tour pour numérateur. La différence entre x et l'une de ces fractions, telle que $\frac{11}{3}$, est moindre que $\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$: enfin chacune est plus approchée que toute autre conçue en termes plus simples qu'elle.

$$x=\frac{409}{119}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7}}}}\qquad 409\left|\frac{119}{3}\right|\frac{52}{2}\left|\frac{15}{3}\right|\frac{7}{2}\left|\frac{1}{7}\right.$$

$\frac{3}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{24}{7}$, $\frac{55}{16}$, $\frac{409}{119}$.

On peut suivre ici tous ces détails sur la fraction $\frac{409}{119}$; on retrouve pour dernière fraction la proposée même, parce qu'elle est irréductible.

545. On sait donc résoudre ce problème, *étant donnée une fraction exprimée par de grands nombres, trouver des fractions irréductibles qui approchent si près de la proposée, que toute fraction plus simple en soit aussi plus*

éloignée. Ainsi, pour le rapport approché π de la circonférence au diamètre on a $\frac{103993}{33102}$, dont on trouve pour valeurs approchées $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, parmi lesquelles on rencontre celles d'Archimède et de Métius (320). On peut encore mettre cette valeur de π sous cette forme.....

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{7.106}+\frac{1}{106.113}-\frac{1}{113.33102}\dots\dots$$

Voici un exemple intéressant de ce genre de calculs. L'année commune est de 365 jours; mais comme la terre ne revient au même point de son orbite qu'au bout de $365^{j}\,5^{h}\,48'\,49''$ environ, on voit que l'année solaire excède la première, et que l'époque de leurs commencemens doit de plus en plus s'éloigner. Le rapport de 24^{h} à $5^{h}\,48'\,49''$ est $\frac{86400}{20929}$.

86400	20929	2684	2141	543	512.	31	16	15	1
	4	7	1	3	1	16	1	1	15

$\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, $\frac{128}{31}$, $\frac{161}{39}$, $\frac{2704}{655}$, $\frac{2685}{694}$, $\frac{5569}{1349}$

telles sont les fractions approchées de $\frac{86400}{20929}$.

Il faudroit, pour que l'année commune recommençât le même jour que l'année solaire (*ou Tropique*), intercaler 20929 jours de plus, sur un espace de 86400 années vulgaires : cela revient à-peu-près à intercaler un jour sur quatre ans, ou 7 jours sur 29 ans, 8 jours sur 33 ans, etc., résultats de moins en moins inexacts. Jules-César, dans sa réformation (*Julienne*), fit ajouter 1 jour tous les 4 ans; mais ce calendrier dut retomber dans le défaut qu'il n'avoit évité qu'en partie, de laisser l'année solaire anticiper sur l'année vulgaire; en Russie, où on n'a pas encore admis la réforme nouvelle, il y a maintenant 12 jours de différence. Dans le calendrier *Grégorien*, on supprime tous les 400 ans trois années bissextiles séculaires; de sorte

qu'on intercale 97 jours sur 400 ans ; et, comme la fraction $\frac{400}{97}$ n'est pas l'une de celles que nous avons trouvées, on auroit pu faire un choix moins inexact. Du reste, l'erreur devra être réparée dans quelques siècles ; $\frac{400}{97}=\frac{86400}{20952}$ (en réduisant au numérateur $86400'' = 24^h$), ce qui montre qu'on suppose l'année de $365^j + 20952''$ au lieu de $365^j + 20929''$; l'erreur est de $23''$ en excès par an. Voyez les notes de Lagrange à l'Algèbre d'Euler.

On sait que la lunaison ou le mois lunaire est de $29^j,530588$; l'année lunaire est donc de $354^j, 367056$, c.-à-d. que la lune, retarde chaque année de $10^j, 875166$, en comparant cette quantité à l'année tropique qui est de $365^j 242222$. On obtient les fractions approchées $\frac{33}{1}$, $\frac{34}{1}$, $\frac{67}{2}$, $\frac{168}{5}$, $\frac{235}{7}$, ... d'où on conclut qu'il faut à-peu-près intercaler 7 lunaisons sur 235, pour que les années lunaires coïncident ; ou plutôt au bout de 19 ans les lunaisons retomberont à-peu-près les mêmes jours, ce qui ne fait qu'une erreur d'un jour sur 300 ans. Telle est l'origine du *Cycle Lunaire*.

3. *Équations indéterminées du premier degré.*

546. Cherchons les systêmes de valeurs entières de x et y qui satisfont à l'équation indéterminée $ax - by = c$, a et b étant supposés premiers entre eux (116). Soient α et β deux valeurs entières de x et y, on a $a\alpha - b\beta = c$. Réduisons $\frac{a}{b}$ en fractions convergentes, et soit $\frac{N}{N'}$ celle qui en approche le plus ; 1 est le numérateur de la différence entre $\frac{N}{N'}$ et $\frac{a}{b}$, ou $N'a - Nb = \pm 1$; la différence entre $\frac{Nc}{N'c}$ et $\frac{a}{b}$ a donc $\pm c$ pour numérateur ; ou $a \times N'c - b \times Nc = \pm c$, équation qui, comparée à

$a\alpha - b\beta = c$ fait voir que la proposée est satisfaite en faisant $x = N'c$ et $y = Nc$, si c est positif : ces valeurs sont les deux termes de la fraction approchée $\frac{N}{N'}$ multipliés par c. Remarquons qu'on peut toujours obtenir pour le deuxième membre c tel signe qu'on veut ; il suffit de retrancher $\frac{Nc}{N'c}$ de $\frac{a}{b}$, ou $\frac{a}{b}$ de $\frac{Nc}{N'c}$.

Une fois qu'on a une solution $x = \alpha$, $y = \beta$, on connoît toutes les autres (117) par les formules $x = \alpha + bt$, $y = \beta + at$. Ces valeurs peuvent d'ailleurs se simplifier en changeant dans l'une et l'autre t en $t \pm k$, ce qui donne $x = \alpha \pm bk + bt$; puis déterminant k de sorte que la constante $\alpha \pm bk$ soit la plus petite possible : cela revient à ajouter b à α, ou à l'en soustraire un certain nombre de fois. On en dira autant pour y.

Reprenons les exemples du n°. 120.

I. Soit $19x + 7y = 117$, la fraction convergente approchée de $\frac{19}{7}$ est $\frac{8}{3}$; donc en multipliant haut et bas par 117, $\frac{19}{7} - \frac{936}{351}$ a 117 pour numérateur de la différence, ou $19 \times 351 - 936 \times 7 = 117$: comparant à la proposée, on a $\alpha = 351$, $\beta = -936$; d'où

$$x = 351 - 7t, \quad y = -936 + 19t :$$

changeant t en $t + 50$, on a $x = 1 - 7t$ et $y = 14 + 19t$.

II. De même pour $9x + 13y = 2000$, on a $\frac{3}{2}$ pour fraction voisine de $\frac{13}{9}$; ainsi $9 \times 6000 - 13 \times 4000 = 2000$; d'où $\alpha = 6000$, $\beta = -4000$; et partant $x = 6000 - 13t$, $y = -4000 + 9t$: enfin mettant $t + 444$ pour t, on a

$$x = 228 - 13t, \quad y = -4 + 9t.$$

III. Pour $9y - 4x = 15$, on a $\frac{2}{1}$ pour fraction approchée de $\frac{9}{4}$; ainsi $9 \times 15 - 4 \times 30 = 15$, d'où

$$y = 15 + 4t, \quad x = 30 + 9t.$$

Ce calcul est plus rapide que celui du n°. 117, et cela d'autant plus que l'opération du commun diviseur entre a et b présente un plus grand développement de divisions. On peut s'en convaincre en traitant $131x - 74y = 9$.

4. *Équations déterminées du second degré.*

547. Réduisons en fraction continue les racines irrationnelles de l'équation du 2°. degré; et ne nous occupons que des positives, puisque les négatives deviennent positives en changeant x en $-x$. Soit donc

$$Ax^2 - 2\alpha x - k = 0,$$

A étant positif, A, α et k des nombres entiers. On a

$$x = \frac{\sqrt{t} + \alpha}{A}, \text{ en faisant } \alpha^2 + Ak = t;$$

or, soit a le plus grand entier contenu dans x, on fera

$$x = a + \frac{1}{x'} = \frac{\sqrt{t} + \alpha}{A}, \text{ d'où } x' = \frac{A}{\sqrt{t} + \alpha - Aa}$$

en transposant a et renversant les fractions. On rend le dénominateur de x' rationnel, en multipliant haut et bas par $\sqrt{t} - (\alpha - Aa)$; il devient $t - (Aa - \alpha)^2$ ou $A(k + 2a\alpha - Aa^2)$: ainsi A est facteur du dénominateur que nous représenterons par AB. Il vient

$$x' = \frac{\sqrt{t} + Aa - \alpha}{B} = \frac{\sqrt{t} + \beta}{B}$$

en faisant $\beta = Aa - \alpha$, $t - (Aa - \alpha)^2 = t - \beta^2 = AB$,

d'où $$B = \frac{t - \beta^2}{A} = k + 2a\alpha - Aa^2.$$

La valeur de x' est de même forme que celle de x; on

peut donc la supposer $= b + \frac{1}{x''}$, d'où on tireroit pareillement $x'' = \frac{\sqrt{t} + \gamma}{C}$; on feroit $x = c + \frac{1}{x'''}$....
et ainsi de suite. La même loi qui lie B et β à A et α, et qui sert à déduire x' de x, servira à tirer x'' de x', x''' de x'', ... cette loi est

$$\beta = Aa - \alpha,\ B = \frac{t - \beta^2}{A}:$$

donc $\gamma = Bb - \beta,\ C = \frac{t - \gamma^2}{B}, \ldots$

ainsi C, D, ...γ, δ, ... sont entiers. Il suit de là que

1°. Puisque a est $< x$ ou $Aa < \sqrt{t} + \alpha$, on a....... $Aa - \alpha = \beta < \sqrt{t}$; donc β γ.... sont moindres que $\sqrt{t}$, qui se reproduit dans chaque fraction complète x', x''.....

2°. $\gamma + \beta = Bb$ indique que $2\sqrt{t} < Bb$ parce que γ et β sont $< \sqrt{t}$; ainsi $2\sqrt{t}$ est une limite que ne peuvent atteindre B, C, D, ... et b, c, d.

Il pourra arriver que α, β ... soient négatifs, ainsi que B, C....... mais ce ne pourra avoir lieu que dans les premiers termes, puisque x est positif, et compris entre les fractions convergentes successives, lesquelles ne tardent pas à devenir très-voisines de x. Quant à la valeur de x qui comporte le signe — pour $\sqrt{t}$, on opérera de même ; et si le coefficient du second terme de $Ax^2 - 2\alpha x - k$ est impair, on a encore les mêmes résultats, seulement B, C...... sont pairs.

Puisque B, C....... β, γ....... sont en nombres infinis et resserrés entre les limites o et $2\sqrt{t}$ ou $\sqrt{t}$, leurs valeurs doivent se reproduire dans $x = \frac{\sqrt{t} + \alpha}{A}$, $x' = \frac{\sqrt{t} + \beta}{B}$...
or, dès qu'on retombe sur une de ces fractions, on doit visiblement retrouver les entiers a, b, c..... dans le même

ordre ; ainsi, après un certain nombre de termes, la fraction continue doit avoir une période qui revient sans cesse. Pour éviter les difficultés de l'impression, nous indiquerons la fraction continue, par les termes qui la composent, en renfermant la partie périodique entre parenthèses. Ainsi

$5, (2, 3)$ équivaudra à $5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\text{ etc.}}}}}$

Soit par exemple $2x^2-14x+17=0$, on trouve

$$x=\frac{7\pm\sqrt{15}}{2};$$

or $\frac{7+\sqrt{15}}{2}=5+\frac{1}{x'}$, donne $x'=\frac{\sqrt{15}+3}{3}=2+\frac{1}{x''}$;

$$x''=\frac{\sqrt{15}+3}{2}=3+\frac{1}{x'''};\quad x'''=\frac{\sqrt{15}+3}{3}=x':$$

ainsi on a $x=5, (2, 3)$, et les fractions convergentes sont $\frac{5}{1}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{38}{7}$, $\frac{87}{16}$,... Pour l'autre racine..........

$\frac{7-\sqrt{15}}{2}=1+\frac{1}{x'}$, on trouve $x'=\frac{5+\sqrt{15}}{5}=1+\frac{1}{x''}$;

$$x''=\frac{\sqrt{15}}{3}=1+\frac{1}{x'''};\quad x'''=\frac{\sqrt{15}+3}{2}=x'';$$

on retombe donc sur la même période, $x=1, 1, 1, 3\,(2, 3)$.

De même $1801x^2-3991x+2211=0$ donne

$$x=\frac{3991+\sqrt{37}}{3602}=1+\frac{1}{x'};$$

d'où $x'=\frac{389-\sqrt{37}}{42}=9+\frac{1}{x''}$; $x''=\frac{11+\sqrt{37}}{2}=8+\frac{1}{x'''}$;

$$x'''=\frac{\sqrt{37}+5}{6}=1+,\quad \frac{\sqrt{37}+1}{6}=1+,$$

$$\frac{\sqrt{37}+5}{2}=5+,\quad \text{enfin}\ \frac{\sqrt{37}+5}{6}=x''':$$

donc $x=1, 9, 8\ (1, 1, 5)$; et on a pour fractions convergentes $\frac{1}{1}, \frac{10}{9}, \frac{81}{73}, \frac{91}{82}, \frac{172}{155}\ldots$ La 2ᵉ. racine est

$$\frac{3991-\sqrt{37}}{3602}=1+\frac{1}{z},\ \text{d'où}\ z=\frac{389+\sqrt{37}}{42}=9+,$$

$$\frac{11-\sqrt{37}}{2}=2+,\quad \frac{7+\sqrt{37}}{6}=2+,$$

enfin $\frac{\sqrt{37}+5}{2}$ qui redonne la période 5, 1, 1 ; on a donc $x=1, 9, 2, 2\ (5, 1, 1)$; d'où $\frac{1}{1}, \frac{10}{9}, \frac{21}{19}, \frac{52}{47}\ldots\ldots$

Lorsque la proposée est $x^2=t$, on opère de même; mais on remarque que 1°. la période commence dès le 2ᵉ. terme; 2°. le dernier de la période est $2a$ ou le double du 1ᵉʳ. de la fraction continue ; 3°. les termes de la période également éloignés des extrêmes, au dernier près, sont égaux ; de sorte qu'on a pour $\sqrt{t}$ la valeur $a\,(b, c, \ldots c, b, 2a)$; 4°. pour la fraction complète $\frac{\sqrt{t}+\pi}{P}$ qui répond au dernier terme $2a$, on a $P=1$. Nous ne pourrions démontrer ces principes sans nous écarter de notre objet (*V.* la Théorie des nombres de Legendre, nᵒ. 28). On peut les vérifier sur $x^2=61$, qui donne

$$x=7, (1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14)$$

les fractions complètes sont

$$x=\sqrt{61}, \frac{\sqrt{61}+7}{12}, \frac{\sqrt{61}+5}{3}, \frac{\sqrt{61}+7}{4}, \frac{\sqrt{61}+5}{9}, \frac{\sqrt{61}+4}{5},$$

$$\frac{\sqrt{61}+6}{5}, \frac{\sqrt{61}+4}{9}, \frac{\sqrt{61}+5}{4}, \frac{\sqrt{61}+7}{3}, \frac{\sqrt{61}+5}{12}, \frac{\sqrt{61}+7}{1}.$$

On trouvera de même que $x^2 = 19$ donne . . . . . . $4\,(2,1,3,1,2,8)$.

548. Passons maintenant au problême inverse et remontons d'une fraction périodique à l'équation génératrice. D'abord, si la valeur z est telle que la période commence dès le premier terme, de sorte qu'elle soit $(g, h \ldots m, n, p)$, soient $\frac{N}{N'}$ et $\frac{P}{P'}$, les fractions convergentes qui répondent aux deux derniers termes n et p de la 1re. période, la suivante est $\frac{Pp+N}{P'p+N'}$ (542) ; en mettant z pour p, on a donc $z = \frac{Pz+N}{P'z+N'}$, (543, 3°) ; d'où $P'z^2 + (N'-P)z = N$, qui est l'équation cherchée. Ainsi, pour $(1,3,2,2)$, on a $\frac{9}{7}$ et $\frac{22}{17}$ pour fractions convergentes répondant à 2 et 2, ainsi $z = \frac{22z+9}{17z+7}$; d'où $17z^2 - 15z = 9$.

Mais si la période ne prend pas dès l'origine, ou si $x = a, b, \ldots e, f\,(g, h \ldots n, p)$, en faisant . . . . $z = (g, h, \ldots n, p)$, on aura $x = a, b, \ldots e, f, z$. Or, soient $\frac{E}{E'}$, $\frac{F}{F'}$ les fractions convergentes qui répondent à e et f, on aura (542), $x = \frac{Fz+E}{F'z+E'}$: ainsi il ne s'agira plus que d'éliminer z entre les deux équations

$$P'z^2 + (N'-P)z = N \text{ et } z\,(F'x - F) = E - E'x,$$

ce qui donne une équation du 2e. degré en x. Donc *toute équation du second degré engendre une fraction continue périodique, et réciproquement*. Soit, par exemple, $1,2,3,4,(1,3,2,2)$; on a vu que $17z^2 - 15z = 9$ donne pour z la valeur de la partie périodique $(1,3,2,2)$; or,

* celle qui la précède est 1,2,3,4, et on a $\frac{10}{7}$ et $\frac{43}{30}$ pour les fractions qui répondent à 3 et 4; donc . . . . $(30x - 43)z = 10 - 7x$: enfin éliminant z, il vient $4117x^2 - 11825x + 8491 = 0$.

Remarquons qu'on peut prendre tel terme qu'on veut d'une période pour son origine, de sorte que 2, (1,3,4) équivaut à 2,1 (3,4,1), ou à 2,1,3 (4,1,3).

5. *Equations indéterminées du second degré.*

* 549. Résolvons d'abord en nombres entiers l'équation $my = x^2 \pm a$, où y n'est qu'au 1er. degré. Si a a le signe $+$, on divisera m par a, et on prendra le quotient par excès; le reste sera négatif; de sorte qu'il s'agit dans les deux cas de rendre $x^2 - a$ divisible par m, a étant $< m$: il faut évidemment pour cela que a soit le reste de la division de x^2 par m.

Si m est pair, le carré de $\frac{1}{2}m \pm \alpha$, étant divisé par m donne $\frac{1}{4}m \pm \alpha + \frac{\alpha^2}{m}$; le reste de $\frac{x^2}{m}$ est donc le même lorsqu'on fait $x = \frac{1}{2}m - \alpha$ et $x = \frac{1}{2}m + \alpha$; de sorte que si on suppose $x = 0, 1, 2, \ldots m$ les restes que donne $\frac{x^2}{m}$ se reproduisent en sens inverse, au-delà de $x = \frac{1}{2}m$. C'est ainsi que $\frac{x^2}{10}$ donne pour restes successifs 0,1,4,9,6,5,6,9,4,1 et 0. On verra de même que si m est impair, au-delà de $x = \frac{1}{2}(m - 1)$ les restes reviennent de même en sens inverse, mais le reste moyen paroît deux fois. On a pour restes de $\frac{x^2}{11}$, 0,1,4,9,5,3,3,5,9,4,1 et 0.

Au-delà de $x = m$, tout nombre est de la forme $x = tm \pm r$, r étant $< m$: d'où. . . . .

$\frac{x^2}{m} = mt^2 \pm 2tr + \frac{r^2}{m}$; ainsi, 1°. le reste de la division de $x^2 = (t \pm m)^2$ par m est le même que pour $x = r$; 2°. tous les restes depuis $x = 0$, à $x = \frac{1}{2}m$ se reproduisent sans cesse; 3°. $x^2 - a$ ne peut être rendu divisible par m qu'autant que a est l'un de ces restes; 4°. soit $x = r$ une des solutions, la valeur générale de x qui satisfait à $my = x^2 - a$ est

$$\pm x = tm \pm r.$$

Soit, par exemple, $x^2 + 46 = 10y$, on la met sous la forme $y = 5 + \frac{x^2 - 4}{10}$: or, on a vu que $\frac{x^2}{10}$ donne 4 pour reste, lorsque $x = 2$; donc $r = 2$, et $x = 10t \pm 2$ est la valeur générale de x, et $y = 10t^2 \pm 4t + 5$; d'où $\pm x = 2, 8, 12, 18, \ldots$ et $y = 5, 11, 19, 37 \ldots$ Tandis qu'au contraire $10y = x^2 - 7$ est absurde, parce qu'aucun nombre mis pour x ne donne 7 pour reste de x^2 divisé par 10. On verra de même que $7y = x^2 - 4$ donne $\pm x = 7t \pm 2$.

Lorsque m est très-grand les essais deviennent nombreux, et on a imaginé plusieurs moyens de faciliter les opérations; comme nous ne pouvons nous étendre sur ce sujet, nous nous contenterons d'en indiquer deux.

1°. Si m est décomposable en facteurs premiers entre eux, ou $m = pqr\ldots$ pour rendre $x^2 - a$ divisible par m, on rendra d'abord $\frac{z^2 - a}{p}$, $\frac{z^2 - a}{q}$, $\frac{z^2 - a}{r}$... entiers, par des valeurs π, χ, ρ... de z, d'où, faisant $z = pu \pm \pi = qv \pm \chi = \ldots$, on devra concilier ces équations entre elles (121). La valeur de z qui en résultera rendra $z^2 - a$ divisible à la fois par p, q, r..., et par conséquent par leur produit m. Soit, par exemple,

* $\frac{x^2-46}{315}$, comme $315 = 9 \times 5 \times 7$, on a $\frac{x^2-1}{9}$, $\frac{x^2-1}{5}$, $\frac{x^2-4}{7}$ qu'on rend entiers, en donnant respectivement à x les valeurs $\pi = \pm 1$, $\chi = \pm 1$, $\rho = \pm 2$: donc $x = 9u + \pi = 5v + \chi = 7s + \rho$, équations qu'on accorde, en faisant $x = 91(10\pi - 9\chi) - 90\rho$, c.-à-d. que $x = 315t \pm k$, k désignant les nombres 19, 89, 271 et 289, ainsi qu'on le voit en mettant pour ρ, χ, et π leurs valeurs, et ayant égard aux diverses combinaisons de signes. Ainsi $x = 19, 26, 44, 89, 226, 271, 289, 296$....

2°. Lorsqu'on met pour y toutes les valeurs entières dans $x^2 = my + a$, il est clair qu'il n'y a que celles qui rendent $my + a$ un carré qui, conviennent à la question, et que $\sqrt{(my + a)} = x$. Or, comme on ne cherche que les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{1}{2}m$, on ne doit employer que celles de $y > -\frac{a}{m}$ et... $< \frac{1}{4}m - \frac{a}{m}$. Or, on peut exclure une grande partie de ces nombres par cette méthode.

Soit $y = Et + F$ la valeur qui résout l'équation... $a + my = Eu + n$ entre les indéterminées y et u : comme $Eu + n = x^2$, $x^2 - n$ est divisible par E. On voit donc que si on prend un entier arbitraire E, et qu'on donne à n une valeur pour laquelle $\frac{x^2-n}{E}$ ne puisse être un entier, $y = Et + F$ ne pourra convenir à la question.

Ainsi, pour $x^2 = 22 + 97y$, comme on ne cherche que les valeurs de x entre 0 et $\frac{1}{2}$ 97 qui répondent à celle de y entre 0 et 24, il s'agit d'exclure une partie des suppositions $y = 1, 2, 3 \ldots 24$. Soit $E = 7$, il résulte de l'équation $22 + 97y = 7u + n$, que tous les

nombres de la forme $y = 7t + 1 - n$ ne peuvent convenir à la question, n étant 3, 5 ou 6, (parce que $\frac{x^2 - 3}{7}$, $\frac{x^2 - 5}{7}$, $\frac{x^2 - 6}{7}$ ne peuvent être entiers); ainsi on exclut les 10 nombres $y = 7t \pm 2$ et $y = 7t + 3$. Pour $E = 3$, n n'a que la valeur 2, ce qui exclut 5 autres nombres qui sont de la forme $3t + 1$: $E = 5$ chasse encore ceux de la forme $5t$ et $5t + 3$. Il ne reste donc que $y = 6$, 11, 14 et 21 qui donnent $22 + 97y = 604$, 1089, 1380 et 2059; le second peut seul être un carré (*), il donne en effet $x = 33$, d'où $x = 97t \pm 33$.

Il sera superflu d'ailleurs de prendre pour les divers nombres E des multiples les uns des autres ou des diviseurs de m : c'est ce dont on se peut aisément assurer. (*Voyez* les Recherches, arith. de Gauss, p. 400).

550. Si maintenant on veut que $\frac{ax^2 + bx + c}{m}$ soit entier, on multipliera par $4a$ (ou simplement par a si b est pair, et on aura $\frac{(2ax + b)^2 + 4ac - b^2}{m}$: faisant $2ax + b = z$ et $b^2 - 4ac = D$, on rendra $\frac{z^2 - D}{m}$ entier; soit $\pm z = mt \pm \alpha$, l'équation qui satisfait à cette condition, il restera à résoudre l'équation du 1er. degré $2ax + b = \pm(mt \pm \alpha)$. Soit $\frac{3x^2 - 5x + 2}{7}$, en

(*) Tout nombre de plusieurs chiffres est de la forme $10a + b$, donc le carré $100a^2 + 20ab + b^2$ ne peut avoir pour unités que celles des carrés de 0, 1, 2, ... 9. On en conclut que tout carré doit être terminé par 25, ou par 1, 9, 4 précédés d'un chiffre pair, ou par 6 précédé d'un chiffre impair, ou enfin par 00 précédés de chiffres qui satisfassent à l'une de ces conditions · 437, 228, 45700 ne peuvent être des nombres carrés.

* multipliant par 12 et posant $6x - 5 = z$, on a $\frac{z^2 - 1}{7}$, d'où $\pm z = 7u \pm 1$; donc $6x - 5 = \pm (7u \pm 1)$, ce qui donne enfin

$$x = 7t + 1,\ = 7t + 3,\ = 7t - 6,\ = 7t - 4.$$

L'équation $11y = 3x^2 - 5x + 6$ est absurde.

* 551. Soit proposée l'équation $az^2 + byz + cy^2 = M$; cherchons-en toutes les solutions en nombres entiers. Soit $D = b^2 - 4ac$; nous distinguerons quatre cas.

1°. Si $D = 0$, le trinôme $az^2 + byz + cy^2$ est un carré; donc M doit être positif et carré; on a donc une équation $my + nz = \pm h$, qui est indéterminée du 1er. degré, et toujours possible, tant que m et n sont premiers entre eux. Soit $4z^2 - 20zy + 25y^2 = 49$, on en tire. . . . $2z - 5y = \pm 7$, d'où $y = 2t \pm 1$ et $z = 5t \pm 1$
* quel que soit t.

2°. Si $D < 0$, en multipliant la proposée par $4a$ (ou simplement par a si b est pair), elle devient

$$(2az + by)^2 + y^2\ (4ac - b^2) = 4aM;$$

faisant $2az + by = t$, on trouve $t^2 + Dy^2 = 4aM$, ainsi M doit être positif. On fera $y = 0, 1, 2 \ldots$ dans $4aM - Dy^2$, et on se bornera à $Dy^2 < 4aM$, ou $y < \sqrt{\left(\frac{4aM}{D}\right)}$, pour que t soit réel; puis on ne prendra que les résultats carrés exacts, s'il en est : leurs racines donneront t; du reste y et t ont le signe $\pm$. On déduira z, mais il faudra ne conserver que les valeurs de t et y qui rendent $t - by$ divisibles par $2a$. Par exemple, $3z^2 - 2zy + 7y^2 = 27$ devient $(6z - 2y)^2 + 80y^2 = 324$; et supposant $6z - 2y = t$; on a $t^2 = 4(81 - 20y^2)$, équation qui n'admet que

$y = 0$ et ± 2; on a donc $t = \pm 18$ et ± 2. Ainsi on fait $y = 0$ qui donne $z = \pm 3$, ou $y = \pm 2$, d'où $z = \pm 1$.

3°. Si $D > 0$, et de plus est un carré exact, alors. . . $az^2 + byz + cy^2$ est le produit de deux facteurs rationnels, de sorte que la proposée a la forme. . . . . . . $(mz + ny) \times (m'z + n'y) = M$. Si donc on décompose M en facteurs $f \times g = f' \times g' = \ldots = 1 \times M$, on éliminera y et z entre des couples d'équations de la forme

$$mz + ny = f, \quad m'z + n'y = g,$$

on aura soin de ne prendre que les valeurs entières de z et y, et de combiner convenablement, de toutes les manières possibles, les facteurs de M en faisant varier leurs signes. Ainsi $2z^2 - 9yz + 7y^2 = 38$, donne $D = 25$; en égalant le 1[er]. membre à zéro, on en obtient les facteurs rationnels, et on a $(z - y) \times (2z - 7y) = 38$. Or $38 = 1 \times 38 = 19 \times 2$, ce qui donne quatre systêmes d'équations. Mais il n'y en a que deux qui donnent des solutions entières, qui sont

d'une part $\quad z - y = 2, \quad 2z - 7y = 19,$
et de l'autre $\quad z - y = 38, \quad 2z - 7y = 1;$

on a $z = -1$ et $y = -3$; puis $z = 53$ et $y = 15$.

A ces deux solutions, il faudra en joindre deux autres qu'on obtient en changeant les signes, parce qu'on peut prendre négativement les facteurs de 38.

4°. Il ne reste plus que le cas où $D > 0$ n'est point un carré; jusqu'ici le nombre des solutions a été fini, mais maintenant il est infini : c'est ce qu'on va voir.

Pour faciliter la comparaison de ce qu'on va dire avec ce qu'on a vu (547), nous mettrons l'équation proposée

sous la forme

$$Ax^2 - 2\alpha xy - ky^2 = P \ldots \quad (1).$$

Les racines de l'équation $Ax^2 - 2\alpha x = k$ sont réelles, et on sait les développer en fraction continue périodique (547). On a $x = \frac{\sqrt{t} + \alpha}{A}$, en faisant $t = \alpha^2 + Ak = D$. Soit p l'un quelconque des termes de la fraction continue, $\frac{\sqrt{t} + \pi}{P}$ la fraction complète, $\frac{z}{y}$ la fraction convergente qui y répondent; enfin $\frac{u}{v}$ celle qui précède $\frac{z}{y}$ dans la série : la suivante est $\frac{zp + u}{yp + v}$; mais si on y remplace p par $\frac{\sqrt{t} + \pi}{P}$, on aura la valeur exacte de x, (542, 3°.); ainsi

$$\frac{\sqrt{D} + \alpha}{A} = \frac{z(\sqrt{D} + \pi) + uP}{y(\sqrt{D} + \pi) + vP}.$$

En réduisant au même dénominateur, et égalant entre eux les termes irrationnels qui ne peuvent être détruits par les autres (494), cette équation se partage en deux

$$Az = y(\alpha + \pi) + vP, \quad Dy + \alpha(vP + \pi y) = A(\pi z + Pu)$$

entre lesquelles éliminant π, puis mettant $\alpha^2 + Ak$ pour D, et divisant tout par A, il vient

$$Az^2 - 2\alpha yz - ky^2 = \pm P,$$

en observant que $zv - yu = +1$ ou -1, suivant que p est un terme de rang impair ou pair.

Il suit de là que pour résoudre en nombres entiers cette équation indéterminée entre y et z, il suffit de développer en fraction continue l'une des racines de l'équation $Ax^2 - 2\alpha x = k$, puis, si parmi les valeurs com-

plètes $\frac{\sqrt{t}+\alpha}{A}$, $\frac{\sqrt{t}+\beta}{B}$, ... on en trouve une dont * le dénominateur soit P, on terminera la fraction continue à l'entier n, immédiatement avant p qui y est contenu, et la fraction continue a, b, c... n aura pour fraction convergente $\frac{z}{y}$. On aura donc une solution de la proposée, pourvu que $\frac{z}{y}$ soit de rang pair, lorsqu'il y a $-P$ dans la proposée, et de rang impair dans le cas de $+P$.

Cette solution ne sera pas la seule; car toutes les fractions $\frac{\sqrt{t}+\pi}{P}$ qui auront P au dénominateur jouiront de la même propriété; si donc p fait partie de la période, on aura une infinité de solutions; mais comme il seroit difficile de les trouver toutes par cette voie, nous en allons bientôt indiquer une autre qui donnera la loi qu'elles observent.

Tout ce qu'on vient de dire pour l'équation (1), peut se dire de toute autre dont le coefficient de yz est pair; s'il n'en étoit pas ainsi, comme pour $az^2+byz+cy^2=M$, en faisant le calcul sur $ax^2+bx+c=0$, on trouve $\pm\frac{1}{2}P$ au lieu de P; de sorte qu'il faut que M soit la moitié du dénominateur de $\frac{\sqrt{t}+\pi}{P}$.

Nous omettons, pour abréger, la démonstration qui fait voir que les solutions obtenues par cette voie sont les seules que comporte l'équation, de sorte qu'elle seroit absurde, si on ne rencontroit aucune des fractions complètes $\frac{\sqrt{t}+\pi}{P}$ dont le dénominateur satisfit à notre condition. Voy. *Théorie des nombres*, n°. 75.

* Soit $z = \alpha$, $y = \beta$ un système de valeurs connues qui satisfont à $az^2 + byz + cy^2 = M$; faisons $z = \alpha t + ku$, $y = \beta t + lu$, t et u étant de nouvelles indéterminées, et k, l des arbitraires dont nous disposerons en égalant à zéro le terme tu, ce qui donne

$$k(2a\alpha + b\beta) + l(2c\beta + b\alpha) = 0, \text{et} Mt^2 + (ak^2 + blk + cl^2)u^2 = M;$$

or k et l doivent être entiers, ainsi $k = \pm (2c\beta + b\alpha)$, $l = \mp (2a\alpha + b\beta)$, d'où $ak^2 + blk + cl^2 = -DM$; ainsi en faisant

$$(2) \quad z = \alpha t + (2c\beta + b\alpha)u, \; y = \beta t - (2a\alpha + b\beta)u,$$

la proposée devient $t^2 - Du^2 = \pm 1$, suivant que M a le signe $+$ ou $-$. Or il est facile de trouver l'un des systèmes de valeurs qui y satisfont, en suivant ici tout ce qui vient d'être démontré pour $az^2 + byz + cy^2 = M$: ainsi on réduira $\sqrt{D}$ en fraction continue . . . . $a\,(b, c, \ldots c, b, 2a)$; on sait que chaque fraction complète qui donne le dernier terme $2a$ de l'une quelconque des périodes a 1 pour dénominateur; donc les fractions convergentes $\frac{p}{q}$ qui répondent au terme b qui précède $2a$, donnent autant de solutions $t = p$, $u = q$. Seulement il faut distinguer deux cas; si le nombre des termes de la période $(b, c, \ldots b, 2a)$ est pair, la proposée n'est résoluble que lorsque le 2e. membre est $+1$; mais il peut être $+$ ou $-$, lorsque ce nombre est impair; il faut prendre la période un nombre de fois pair pour $+1$, et impair pour -1.

Mais il suffit de chercher la fraction convergente la plus simple, et les autres s'en déduisent; car soit

$$t + u\sqrt{D} = (p + q\sqrt{D})^m.$$

En développant la puissance m, et partageant l'équation en deux à cause des termes irrationnels (494), on peut en tirer des valeurs de t et u et les substituer dans $t^2 - Du^2 = \pm 1$; mais ce calcul se simplifie en remarquant qu'on a aussi $t - u\sqrt{D} = (p - q\sqrt{D})^m$, et qu'en multipliant ces équations entre elles, on trouve $t^2 - Du^2 = (p^2 - Dq^2)^m = (\pm 1)^m$, pourvu que p et q satisfassent à la proposée. Ainsi, nos valeurs de t et de u y satisferont aussi, quel que soit m, si elle contient $+1$; mais si elle a -1, la même chose aura encore lieu, pourvu que m soit impair, afin que $(-1)^m = -1$.

Par exemple, pour $\sqrt{19}$, on a 4 (2,1,3,1,2,8) la période ayant 6 termes $t^2 - 19u^2 = -1$ est absurde : soit donc $$t^2 - 19u^2 = 1$$ comme $\frac{170}{39}$ est la fraction convergente qui répond à l'avant-dernier terme 2, on a $p = 170$, $q = 39$; d'où $t + u\sqrt{19} = (170 + 39\sqrt{19})^m$ qui donne, en faisant $m = 0, 1, 2 \ldots$ et égalant entre eux les termes irrationnels, $t = 1$, 170, 57799, ... $u = 0$, 39, 13260,...

De même $\sqrt{13}$ donne 3 (1,1,1,1,6), la période a 5 chiffres; on peut résoudre $t^2 - 13u^2 = \pm 1$. Si on a -1, comme $\frac{18}{5}$ répond à 3,1,1,1,1, $p = 18$, $q = 5$, d'où
$$t + u\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})^m,$$
m étant pair (mais pas $= 0$) : on a $t = 18$, 23382,... $u = 5$, 6485, ... mais si la proposée est $t^2 - 13u^2 = 1$, on prendra $\frac{649}{180}$ qui est la valeur de 3,1,1,1,1,6,1,1,1,1, d'où $p = 649$, $q = 180$, et
$$t + u\sqrt{13} = (649 + 180\sqrt{13})^m,$$
quel que soit m. Donc $t = 1$, 649, 842401, ... $u = 0$, 180, 233640.

Soit $2z^2 - 14yz + 17y^2 = 2$; en réduisant en frac-

* $a' z'^2 + bz'y + c'y^2 = M'$, z, y et M' étant premiers entre eux.

3°. Comme le dénominateur de chaque fraction complète est toujours $< 2\sqrt{D}$, si on avoit $M > 2\sqrt{D}$, le procédé ci-dessus ne pourroit résoudre la proposée : on feroit alors $y = nz + Mu$, n étant indéterminée ; il viendroit

$$\frac{a + bn + cn^2}{M} \cdot z^2 + (b + 2cn)\,uz + cMu^2 = 1.$$

Donc si on prend pour n tous les nombres qui rendent $\frac{a + bn + cn^2}{M}$ entier, on aura à résoudre autant d'équations $a'z^2 + b'uz + c'u^2 = 1$ qui rentreront dans les cas ci-dessus. Seulement il faudra ne prendre que les valeurs $n < M$, puisqu'en remplaçant n par $n - \alpha M$ et u par $u + \alpha z$, y ne change pas, ce qui fait voir que $n > M$, ne donne pas des valeurs différentes de z et y.

Ainsi pour $2x^2 - 23y^2 = 105$, on fait $x = ny - 105z$, et on trouve que n étant < 105, il faut que $\frac{2n^2 - 23}{105}$ soit entier, ce qui donne $n = 8$, 13, 22 et 43. On a donc à résoudre les quatre équations

$$y^2 - 32yz + 210z^2 = 1,\quad 3y^2 - 52yz + 210z^2 = 1,$$
$$9y^2 - 88yz + 210z^2 = 1,\ \text{et}\ 35y^2 - 172yz + 210z^2 = 1.$$

* Prenons maintenant l'équation générale

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \ldots \quad (3),$$

et faisons toujours $D = b^2 - 4ac$: on peut par une transformation la ramener à la forme précédente ; car soit $y = ky' + \alpha$; $x = lx' + \beta$; k, l, α, β étant des constantes arbitraires, on chasse les termes en x' et y' ; en posant (425)

$$2a\alpha + b\beta + d = 0, \quad 2c\beta + b\alpha + e = 0;$$

$$ak^2y'^2 + bklx'y' + cl^2x'^2 + \frac{Q}{D} = 0,$$

$$Q \text{ étant } = cd^2 + ae^2 - bed + fD.$$

Enfin, k et l étant encore arbitraires, on chasse le dénominateur D, en faisant $k = l = \frac{1}{D}$, ce qui donne

$$y = \frac{y' + 2cd - be}{D}, x = \frac{x' + 2ae - bd}{D}, ay'^2 + bx'y' + cx'^2 + DQ = 0,$$

on ne devra prendre ensuite pour x' et y' que les valeurs qui rendront x et y entiers.

Pour appliquer tous ces préceptes à un exemple, soit

$$y^2 + 8xy + x^2 - 4y + 2x + 1 = 0,$$

on chasse les 1res. puissances de x et y, en faisant . . .
$y = \frac{y' - 6}{15}, x = \frac{x' + 9}{15}$; il vient $y'^2 + 8x'y' + x'^2 = -15.36$; mais à cause du facteur carré 36, on fera $y' = 6v$, $x' = 6x''$, d'où $v^2 + 8vx'' + x''^2 = -15$. Comme $15 > 2\sqrt{D}$, on posera $x'' = nv - 15z$; d'ailleurs. . . . $\frac{1 + 8n + n^2}{15}$ n'est entier (n étant < 15) qu'en faisant $n = 11$, on a

$$x'' = 11v - 15z, \quad \text{d'où } 14v^2 - 30vz + 15z^2 = -1.$$

Cette équation se résout en développant $\frac{\sqrt{15} + 15}{14}$ en fraction continue; et (outre la solution $v = 1$, $z = 1$, qui ne fait pas partie de la période et qui ne rend pas x et y entiers), on trouve $v = 4$ et $z = 3$, d'où. . . $v = 4t + 15u$, $z = 3t + 11u$; donc

$$x = \frac{2t+3}{5},\ y = \frac{30u - 8t - 2}{5},$$

u et t ayant le double signe $\pm$, et leurs valeurs satisfaisant à $t^2 - 15u^2 = 1$ et comme $p = 4$, $q = 1$, on a, quel que soit m, $t + u\sqrt{60} = (4 + 1\sqrt{60})^m$. On en conclura aisément $x = 1$, $y = 2$; ou $x = -1$, $y = 0$ et $= 12$; etc.

553. On pourroit demander les valeurs de x et y qui seroient simplement rationnelles : pour cela, reprenons l'équation générale (3), en la résolvant par rapport à y, on a une expression de la forme .... $y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{(Dx^2 + mx + p)}$; il s'agit donc d'obtenir les valeurs de x qui rendent $Dx^2 + mx + p$ un carré. Soit $(zx + u)^2$ ce carré, on en tire

$$Dx^2 + mx + p = z^2x^2 + 2zxu + u^2.$$

Il se présente trois cas.

1°. Si D est un carré positif, on déterminera z en posant $D = z^2$, d'où $x = \frac{u^2 - p}{m - 2zu}$; ainsi quel que soit u, x et y seront rationnels.

2°. Si p est un carré positif, on fera $p = u^2$, et on aura $x = \frac{2zu - m}{D - z^2}$, qui remplit la même condition quel que soit z.

3°. Enfin, si $Dx^2 + mx + p$ est décomposable en deux facteurs rationnels $(a + bx)(c + dx)$, alors on égalera le radical à $(a + bx)u$; on en tirera (*V.* n°. 717) $c + dx = (a + bx)u^2$, d'où $x = \frac{au - c}{d - bu^2}$.

Ces cas sont visiblement les seuls pour lesquels y et x puissent être rendus rationnels; car, non-seulement

$Dx^2 + mx + p$ doit être exprimé par un carré, en fonction d'une nouvelle inconnue, mais il faut aussi que la valeur de x tirée de cette relation soit rationnelle.

Pour partager un carré a^2 en deux autres x^2 et y^2, il faut que $x^2 + y^2 = a^2$, d'où $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$: or $a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$, on fera donc le radical $= (a - x)z$, d'où $a + x = (a - x)z^2$; ainsi

$$x = \frac{a(z^2 - 1)}{z^2 + 1} \text{ et } y = \frac{2az}{z^2 + 1}.$$

On auroit pu aussi supposer le radical $= zx + a$, et on auroit obtenu les mêmes résultats.

Pour qu'un nombre a soit la différence de deux carrés x^2 et y^2, il faut que $y = \sqrt{(x^2 - a^2)}$, alors on égale le radical à $x - z$, et on a $x = \frac{a + z^2}{2z}, y = \frac{a - z^2}{2z}$.

Les théories qui ont fait le sujet de cet article, servent de base à la recherche des propriétés des nombres : nous ne pouvons les développer ici ; et nous ne ferons pas difficulté d'avouer que notre exposé auroit besoin de beaucoup plus de développemens ; mais comme ils nous écarteroient trop de notre objet, nous renverrons à la *Théorie des nombres* de Legendre et aux *Recherches arithmétiques* de Gauss, ouvrages qui font l'admiration des analystes.

6. *Résolution des Équations numériques.*

554. Soit $X = 0$ une équation donnée que nous supposerons préparée, de manière qu'il n'y ait qu'une racine comprise entre deux nombres entiers successifs ; et que pour chaque racine, on connoisse l'entier immédiatement moindre. On a déja vu (518, 4°.) les moyens de satisfaire à ces conditions.

Soit donc $a <$ que l'une des racines; en faisant $x = a + \frac{1}{x'}$, x' sera > 1, et $X = 0$, deviendra $X' = 0$, équation dont x' est l'inconnue; elle n'a qu'une racine > 1, puisque s'il en existoit plusieurs, $\alpha, \beta, \ldots$ x auroit autant de valeurs $a + \frac{1}{\alpha}$, $a + \frac{1}{\beta}, \ldots$ comprises entre a et $a + 1$, ce qui est contre l'hypothèse.

En raisonnant de même pour $X' = 0$, on trouvera l'entier b immédiatement plus petit que la valeur de $x' > 1$, et on fera $x' = b + \frac{1}{x''}$, x'' n'admettant aussi qu'une racine > 1 : on continuera ainsi, $x'' = c + \frac{1}{x'''}, \ldots$ $x''' = d + \frac{1}{x^{iv}}, \ldots$ et on en conclura $x = a, b, c, d, \ldots$ puis les fractions convergentes, dont on connoîtra pour chacune le degré d'approximation.

Soit, par exemple, $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; on sait (page 54) que $x = 1$ et $x = 2$ donnent des résultats de signes contraires; de même $x = 0$ et $x = 1$; enfin aussi $x = -1$, et $x = -2$. On voit donc que notre équation satisfait aux conditions ci-dessus, puisque ses trois racines sont entre 1 et 2, 0 et 1, -1 et -2. Cherchons la 1re., et faisons $x = 1 + \frac{1}{x'}$, ce qui donne la transformée $-x'^3 - x'^2 + 2x' + 1 = 0$, dont la racine > 1 est comprise entre 1 et 2; on fera donc. . . . . $x' = 1 + \frac{1}{x''}$, et ainsi de suite. Voici le calcul dans lequel nous avons supprimé les accens pour x', x''. . .

Proposée... $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; entier imméd. $< x$.. 1
1re. transf. $-x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$.................... 1
2e....... $x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$ 4
3e....... $-x^3 + 20x^2 + 9x + 1 = 0$ 20
4e....... $181x^3 - 391x^2 - 40x - 1 = 0$.......... 2
5e.......$-197x^3 + 568x^2 + 695x + 181 = 0$....... 3
6e....... $2059x^3 - 1216x^2 - 1205x - 197 = 0$..... 1

La valeur de x est donc traduite en la fraction continue 1,1,4,20,2,3,1 .... et on en déduit les fractions convergentes $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{182}{101}$, $\frac{373}{207}$, $\frac{1301}{722}$, $\frac{1674}{929}$, ... on est, par exemple, assuré que $\frac{1301}{722}$ est $> x$ et n'en diffère pas de $\frac{1}{722^2}$, de sorte que sa valeur 1,801939 est exacte jusqu'à la 6e. décimale.

Pour la racine comprise entre 0 et 1, on trouve de même la fraction continue 0,2,4,20, ... et même dès la seconde opération, comme on tombe sur la seconde transformée ci-dessus, on doit retrouver les mêmes termes subséquens de la fraction continue 0,2,4,20,2,3,1,6,10,5,2.... Les fractions convergentes sont :

$\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{81}{182}$, $\frac{166}{373}$, $\frac{579}{1301}$, $\frac{745}{1674}$, ... d'où $x = 0,445054$.

Enfin pour la racine négative, on changera d'abord x en $-x$ et on cherchera la racine comprise entre 1 et 2 pour $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, qui est précisément la 1re. transformée ci-dessus, ainsi on a la fraction continue 1, 4, 20, 2, ... et les fractions convergentes $-\frac{1}{1}$, $-\frac{5}{4}$, $-\frac{101}{81}$, $-\frac{207}{166}$, $-\frac{722}{579}$, $-\frac{929}{745}$... d'où $x = -1,246987$.

Quoique cet exemple, que nous avons déja résolu par la méthode de Newton (518), offre une particularité qui ne se retrouveroit pas dans un autre, qui consiste en ce qu'on n'est obligé de chercher les transformées que pour

l'une des racines, cependant on voit que la méthode demeure la même dans tous les cas.

Dans l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, qui n'a qu'une seule racine réelle, laquelle est entre 2 et 3, on trouve la fraction continue 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3... et les fractions convergentes $\frac{2}{1}$, $\frac{21}{10}$, $\frac{23}{11}$; $\frac{44}{21}$; $\frac{111}{53}$, $\frac{155}{74}$, $\frac{576}{275}$,.... ainsi $x = 2{,}0945514\overline{9}$.

* 555. La longueur de ces calculs les rendroit rebutans, si on ne réussissoit à les simplifier par des procédés faciles. Voyons d'abord des moyens pour passer de la proposée à sa transformée, ou de celle-ci à l'équation qui la suit.

Faisons $x = a + y$ dans $Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + U = 0$, le résultat ordonné a la forme.....................
$A' + B'y + C'y^2 + \ldots . \; U'y^m = 0$; et on sait que (501) $A' = Aa^m + Ba^{m-1} + \text{etc.} + A$; que B' est le dérivé de A' ; C' la moitié de celui de B', etc. Donc pour faire $x = a + \frac{1}{x'}$, il suffit de mettre ici $\frac{1}{x'}$ pour y et on a

$$A' + \frac{B'}{x'} + \frac{C'}{x'^2} + \ldots \frac{A}{x'^m} = 0, \text{ ou } A'x'^m + B'x'^{m-1} + \ldots + A = 0.$$

Ainsi pour passer de la 3e. à la 4e. transformée dans le 1er. exemple ci-dessus, on fera $x = a + \frac{1}{x'}$, a étant $= 20$; d'où

$$A' = -a^3 + 20a^2 + 9a + 1 = 181,$$
$$B' = -3a^2 + 40a + 9 = -391,$$
$$C' = -3a + 20 = -40, \; D' = -1,$$

et on a $\quad 181\,x'^3 - 391\,x'^2 - 40\,x' - 1 = 0.$

La difficulté de la recherche de l'entier le plus voisin de x', x'', ... est beaucoup diminuée par le procédé suivant.

Soient p le dernier entier et $\frac{N}{N'}$, $\frac{P}{P'}$ les deux dernières fractions convergentes calculées ; pour pousser plus loin l'approximation, il faudroit mettre $p+\frac{1}{z}$ pour l'inconnue dans la dernière transformée (543, 3°.) ; ainsi $x=\frac{Pz+N}{P'z+N'}$: cette valeur mise pour x dans la proposée, donneroit la transformée dont il s'agit sans passer par les intermédiaires ; et on voit qu'on peut de même passer aussi d'une transformée à une autre d'un rang quelconque, pourvu qu'on connoisse N, N', P et P'.

Or, puisqu'on a $z=\frac{N-N'x}{P'x-P}$, en faisant en partie la division et remarquant que $P'N-PN'=\pm 1$, on trouve

$$z=-\frac{N'}{P'}\pm\frac{1}{P'(P'x-P)}=-\frac{N'}{P'}\pm\frac{1}{\delta P'^2},$$

en faisant $\delta=x-\frac{P}{P'}=$ la différence entre x et sa valeur approchée. Soient δ', δ''.... les différences entre $\frac{P}{P'}$ et les autres racines de la proposée, pour lesquelles z est <1 ; puis z' z''... les valeurs de z correspondantes dans les transformées $A'z^m+B'z^{m-1}+\ldots\ldots=0$, ce qui donne..... $-\frac{B'}{A'}=z+z'+z''+\ldots\ldots.$ Nous aurons les $m-1$ valeurs

$$z'=-\frac{N'}{P'}\pm\frac{1}{\delta' P'^2},\ z''=-\frac{N'}{P'}\pm\frac{1}{\delta'' P'^2},\ldots$$

d'où $z=\frac{N'(m-1)}{P'}-\frac{B'}{A'}\mp\frac{1}{P'^2}\left(\frac{1}{\delta'}+\frac{1}{\delta''}+\ldots\right)$

* Or, les différences δ' δ'',.... sont par supposition > 1 ; de plus P' croît à mesure qu'on approche plus de x ; ainsi, le dernier terme de notre équation ne tarde pas à devenir négligeable, et on a

$$x = \frac{N'(m-1)}{P'} - \frac{B'}{A'}.$$

Ainsi, après avoir obtenu $\frac{373}{207}$, $\frac{1301}{722}$ et la 6e. transformée dans notre exemple ci-dessus, on voit que notre formule devient $x = \frac{414}{722} + \frac{2016}{2059} = \frac{1730378}{1486598}$, ce qui donne non-seulement l'entier 1, mais encore la fraction continue 1, 6, 10, 5, 5 ...... dont les quatre premiers termes conviennent à la transformée ; de sorte que 1, 6, 10, 5, font suite à la fraction trouvée, et qu'on aura sur-le-champ la neuvième transformée en faisant $x = \frac{311y + 71}{362y + 61}$, et de là d'autres termes de la fraction continue.

On pourroit demander jusqu'à quel terme de la fraction continue provenue de x, on peut pousser le calcul, sans cesser d'avoir des valeurs propres à celle de x ; mais nous ne nous étendrons pas sur cet objet, qu'on trouvera développé dans la *Théorie des Nombres, de Legendre*, n°. 104 ; on peut aussi consulter la *Résolution numérique de Lagrange*, pag. 98.

Lorsque la proposée admet des racines commensurables, la fraction continue se termine ; autrement elle va à l'infini. Lorsqu'elle contient une période, elle admet un facteur rationnel du second degré : le retour des mêmes chiffres ne suffiroit pas pour conclure que la période existe, puisque les transformées qui donnent ces chiffres doivent avoir non-seulement une même partie entière, mais encore la même racine ; alors elles doivent avoir un commun diviseur du deuxième degré en x.

Ainsi pour $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 22x - 22 = 0$, on a 3 pour entier approché ; puis

1re. transf. — $10x^4 + 22x^3 + 27x^2 + 10x + 1 = 0 \ldots 3$
2e........ $58x^4 - 314x^3 - 315x^2 - 98x - 10 = 0 \ldots 6$
3e........ $-4594x^4 + 12322x^3 + 6561x^2 + 1078x + 58 = 0 \ldots 3$

On tire de cette dernière $z = \frac{9}{19} + \frac{12322}{4594} = \frac{275464}{87286}$, valeur qui, développée, donne la fraction continue 3, 6.... Le retour des chiffres 3 et 6 fait présumer la période, et on s'en assure en cherchant si la première et la troisième transformée ont un facteur commun (ce qui a lieu ici, puisqu'il est $2x^2 - 6x - 1$) : ou ce qui est plus court en traduisant en équation (548) la fraction continue 3, (3, 6,) ce qui donne $x^2 - 11 = 0$, et essayant la division de la proposée par $x^2 - 11$. On a donc ici les racines... $x = \pm 3\ (3, 6)$, $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

556. On peut appliquer aussi notre procédé à l'extraction des racines de tous les degrés, ce qui revient à la résolution de l'équation $x^m - A = 0$. Soit, par exemple, $x^3 = 17$, on trouve la fraction continue 2, 1, 1, 3, 138 ...... on en tire $x = \frac{2489}{968}$; et si on veut une plus grande approximation, on passera à une cinquième transformée, pour laquelle on aura une valeur de z qui continuera la fraction de cette manière 1, 1, 3..... en la terminant à l'avant-dernier nombre, on a $x = \frac{4996}{1943} = 2,57128152$, valeur dont la dernière décimale est trop foible.

Notre procédé peut s'appliquer même aux équations plus compliquées. Ainsi, soit $10^x = 29$, on trouve que x est entre 1 et 2, et on fait $x = 1 + \frac{1}{x'}$, d'où..........

$10^{1 + \frac{1}{x'}} = 29$, ou $10 \times 10^{\frac{1}{x'}} = 29$; divisant par 10 et élevant à la puissance x', on a enfin $10 = (2,9)^{x'}$. De

même, comme x' est entre 2 et 3, on fait $x'=2+\frac{1}{x''}$; d'où

$$8,41\times 2,9^{x''}=10 \text{ et } \left(\tfrac{1000}{841}\right)^{x''}=2,9.$$

En continuant ainsi, on trouve $x=1, 2, 6, 6, 1, 2, 1, 2,$ .... on en tire ensuite les fractions convergentes, et, comme celle qui répond au dernier terme est.. ... $\frac{1439}{984}=1,4623983$..... on a une valeur $>x$, mais approchée à moins de $\frac{1}{984^2}$; ainsi les six premières décimales sont exactes.

De même $10^x=23$ donne la fraction continue 1, 2, 1, 3, 4, 17, 2.... et la fraction convergente $\frac{2270}{1667}=1,3617276$.... est exacte jusqu'aux dix-millionnièmes.

Ainsi on sait résoudre par approximation toute équation $10^x=b$ et même $a^x=b$, c'est-à-dire qu'on a un nouveau procédé pour trouver les logarithmes des nombres dans tous les systèmes, et pour en construire des tables.

CHAPITRE IV.

MÉTHODE DES COEFFICIENS INDÉTERMINÉS.

Nota. *Les sujets que nous allons traiter ne sont pas partie de ceux qu'on exige des candidats pour l'Ecole polytechnique; nous nous dispenserons, d'après cet avertissement, de mettre des* *.

557. Soient F et F' deux fonctions *Identiques* de x, $F=F'$; et supposons qu'à l'aide de quelqu'artifice d'analyse, on soit parvenu à préparer cette équation de manière à ordonner les deux membres par rapport à x; de sorte,

par exemple, qu'elle soit sous la forme

$$a + bx + cx^2 + \ldots\ldots = a' + b'x' + c'x^2 + \text{etc.};$$

comme il suit de la nature même des équations identiques, que les deux membres F et F' ne doivent différer que par la manière dont ils sont exprimés analytiquement (dans l'un, par exemple, les calculs ne sont qu'indiqués, tandis qu'ils sont exécutés dans l'autre); il s'ensuit que lorsque ces deux membres sont mis sous la même forme, la seule différence qui les constituait a dû disparoître, et chaque terme d'une part devra se reproduire de l'autre dans le même état. On conclut de là qu'on a $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ ...... de sorte que *toute équation identique se partage en autant d'autres, qu'elle contient de puissances différentes de* x (*).

558. Cela posé, une fonction F de x étant donnée, supposons qu'on veuille la mettre sous une autre forme qu'*on soit assuré lui convenir;* pour cela, on représentera les coefficiens des divers termes par A, B, C,... qu'il faudra déterminer, et c'est en cela que consiste la méthode dont nous allons nous occuper. Pour y parvenir, on établira l'égalité entre la fonction donnée F et la somme F' des termes qu'on suppose la reproduire, puis, à l'aide du calcul, on préparera cette équation $F = F'$, de manière à en *ordonner* les deux membres par rapport à x; *comparant*

(*) On peut encore démontrer ce théorème comme il suit. Notre équation devant subsister, quelque valeur qu'on attribue à x, en faisant $x = 0$, on trouve $a = a'$, ce qui prouve déjà que les termes sans x s'entre-détruisent; notre équation, divisée par x, se réduit donc à $b + cx + \ldots = b' + c'x + \ldots$; mais il suit de ce qu'on vient de dire que $b = b'$; donc on a aussi $c + dx + \ldots = c' + d'x + \ldots$, et ainsi de suite.

ensuite ces divers termes, on en déduira autant d'équations, lesquelles donneront les valeurs de A, B, C.......
Pour faciliter l'intelligence de cette méthode, il convient de l'appliquer à des exemples.

1. *Décomposition des Fractions rationnelles.*

559. Proposons-nous de décomposer la fraction.....
$\frac{kx+l}{(x-a)(x-b)}$ en deux autres dont elle soit la somme : avec un peu d'attention, il est aisé de prévoir la forme de celles-ci ; elles sont $\frac{A}{x-a}$ et $\frac{B}{x-b}$, A et B étant indépendans de x et indéterminés : c'est, au reste, ce que le calcul va prouver. En réduisant ces fractions au même dénominateur $(x-a)(x-b)$, il ne restera plus qu'à établir l'identité entre les numérateurs,............ ou $kx+l=(A+B)x-(Ab+Ba)$; or, il suit de ce qu'on connoît (557), que cette équation se partage en deux autres du premier degré

$$A+B=k \quad \text{et} \quad Ab+Ba=-l,$$

d'où $$A=-\frac{ka+l}{b-a},\; B=\frac{kb+l}{b-a}.$$

Soit proposée la fraction $\frac{kx^2+lx+m}{(x-a)^2(x-b)}$; on la supposera $=\frac{Ax+B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}$: en effet, en réduisant au même dénominateur, on trouvera

$$kx^2+lx+m=(A+C)x^2+(B-Ab-2aC)x+(a^2C-Bb)$$

et l'identité sera établie en faisant

$$k=A+C,\quad l=B-Ab-2aC,\quad m=a^2C-Bb$$

équations du premier degré qui détermineront A, B et C.

Si on avoit eu $\frac{kx^3 + lx^2 + mx + n}{(x-a)^3(x-b)}$, on auroit dû faire cette fraction $= \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-a)^3} + \frac{D}{x-b}$. Et, en général, soit la fraction irréductible $\frac{U}{V}$, dans laquelle x entre à un degré moindre dans U que dans V, et $V = P \times Q$, P et Q étant des polynomes premiers entre eux et où x est aux degrés p et q; on pourra supposer

$$\frac{U}{V} = \frac{Ax^{p-1} + Bx^{p-2} \ldots + L}{P} + \frac{A'x^{q-1} + \ldots + L'}{Q}.$$

En effet, réduisons au dénominateur commun V, et pour cela multiplions $Ax^{p-1} + \ldots$ par Q, et $A'x^{q-1} + \ldots$ par P, nous aurons visiblement deux polynomes de degré $p + q - 1$. Ainsi U, qui est au plus de ce même degré, devra être identique à leur somme, qui forme un polynome *complet* de ce degré, attendu que A B ..... étant indéterminés, il ne peut éprouver de réductions. On comparera terme à terme ces deux expressions, et on en déduira $p + q$ équations, nombre égal à celui des inconnues, puisque les termes de nos numérateurs sont en nombre p et q : c'est ce qui prouve la légitimité de la décomposition indiquée.

Si P et Q sont eux-mêmes des produits de deux facteurs premiers entre eux, on pourra de nouveau décomposer ces dernières fractions en d'autres assujéties à la même loi, et ainsi de suite. Cela revient à *décomposer la fraction proposée en autant d'autres que le dénominateur a de facteurs inégaux, les numérateurs partiels étant des polynomes*

complets d'un degré moindre d'une unité que leurs dénominateurs.

560. La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{U}{V}$ est réduite à celle du dénominateur V en ses facteurs, puisque par la division, on peut toujours faire en sorte que son degré soit plus élevé que celui du numérateur U. Il peut se présenter quatre cas.

I. Si le dénominateur V a des facteurs inégaux et réels, ou $V = (x-a)(x-b) \ldots \times S$; on posera

$$\frac{U}{V} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots\ldots + \frac{P}{S}.$$

1°. Soit par exemple $\frac{2-4x}{x^2-x-2}$, en égalant le dénominateur à zéro, on a $x=2$ et $x=-1$, ce qui donne pour ses facteurs $x-2$ et $x+1$. On fera donc

$$\frac{2-4x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1};$$

d'où on tirera $A = -2 = B$, de sorte que la fraction proposée $= \frac{2}{2-x} - \frac{2}{x+1}$.

2°. De même pour $\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x}$, on trouvera l'identité $1 = (B-A)\,x + a\,(B+A)$; on supposera que le premier membre contient $0 \times x$, et comparant terme à terme, il viendra $B - A = 0$, $a\,(B+A) = 1$, d'où $B = A = \frac{1}{2a}$ et

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a\,(a+x)} + \frac{1}{2a\,(a-x)}.$$

3°. On fera $\frac{1}{x(a^2-x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a+x}+\frac{C}{a-x}$, et on trouvera $1=Aa^2+ax\,(B+C)+x^2\,(C-A-B)$, ce qui donne $1=Aa^2$, $B+C=0$, $C-A-B=0$; d'où $A=\frac{1}{a^2}$, $B=-\frac{1}{2a^2}$, $C=\frac{1}{2a^2}$: ainsi

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)}=\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{2a^2(a+x)}+\frac{1}{2a^2(a-x)}.$$

II. Si le dénominateur V a des facteurs inégaux et imaginaires du premier degré, qui se conjuguent deux à deux en facteurs réels du deuxième ou .... $V=(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')\dots\times S$. On posera

$$\frac{U}{V}=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\frac{Cx+D}{x^2+p'x+q'}+\dots\dots\frac{P}{S}.$$

4°. Pour $\frac{x^2-x+1}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$, on obtient $A=\frac{3}{2}$, $B=C=-\frac{1}{2}$.

5°. De même en faisant $\frac{x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$, on trouve $A=C=-B=\frac{1}{3}$.

III. Si V a des facteurs réels et égaux, ou $V=(x-a)^nS$, on pourra faire $\frac{U}{V}=\frac{Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\dots}{(x-a)^n}+\frac{P}{S}$, mais il sera préférable de poser

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{B}{(x-a)^{n-1}}+\dots\frac{T}{x-a}+\frac{P}{S}.$$

Il est en effet visible qu'en réduisant au même dénominateur, les résultats sont équivalens de part et d'autre.

6°. Ainsi pour la fraction $\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}$ quoi-

qu'on puisse la décomposer en $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{(x+1)^2}$, d'où $A=2$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=-E=\frac{7}{4}$, $D=-\frac{5}{4}$; il sera préférable de faire

$$\frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1},$$

qu'on trouve $=\frac{2}{x}-\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}-\frac{\frac{5}{4}}{x+1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{\frac{3}{4}}{x-1}$

7°. On a de même

$$\frac{1}{x(1+x)^2(1+x+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{2x+3}{(1+x)^2}+\frac{x}{1+x+x^2}$$

ou $$=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{x}{1+x+x^2}.$$

IV. Pareillement si V a pour facteur $(x^2+px+q)^n$, ceux du premier degré de x^2+px+q étant supposés imaginaires, on fera

$$\frac{U}{V}=\frac{Ax^{2n-1}+Bx^{2n-2}+\ldots+T}{(x^2+px+q)^n}+\frac{P}{S},$$

ou plutôt $$\frac{U}{V}=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots.$$

8°. Ainsi, on fera $\frac{1}{(1+x)x^2(x^2+2)(x^2+1)^2}$

$$=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+2}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}+\frac{Hx+I}{x^2+1},$$

et on trouvera $A=\frac{1}{12}$, $B=-C=\frac{1}{2}$, $D=-E=\frac{1}{6}$, $F=-G=\frac{1}{2}$, $H=-I=\frac{1}{4}$.

Au reste, nous donnerons des moyens plus expéditifs pour déterminer les coefficiens (715).

2. *Séries Récurrentes.*

561. Proposons-nous de développer en *Série* (485, I.), $\frac{a}{1+ax}$. On est assuré par la division de a par $1+ax$, que cette série procède suivant les puissances croissantes et positives de x, c.-à.-d. qu'elle a la forme........... $A+Bx+Cx^2+$....... Il ne s'agit donc que de déterminer les coefficiens $A\ B\ C$... et la loi qu'ils observent entre eux. L'identité $\frac{a}{1+ax}=A+Bx+Cx^2+$.... étant multipliée par $1+ax$, donne

$$a=A+\left.\begin{matrix}B\\+Aa\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}C\\+Ba\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}D\\+Ca\end{matrix}\right|x^3+\begin{matrix}....\\....\end{matrix}$$

On en conclut $A=a$, $B+Aa=0$, $C+Ba=0$... ; la 1re. de ces équations détermine A, la 2e. B, etc... On peut d'ailleurs trouver A directement en faisant $x=0$ dans la fraction proposée et dans son développement.

On remarquera, d'après la nature même du calcul, que si M et N sont deux coefficiens successifs de notre série, on a $N+Ma=0$, d'où $N=-aM$: ainsi tout coefficient est le produit du précédent par $-a$; ou, si on veut, *un terme quelconque se trouve en multipliant celui qui le précède par* $-ax$. Ce multiplicateur est le terme qui, en signe contraire, accompagne l'unité dans le dénominateur de la fraction proposée. On a donc

$$\frac{a}{1+ax}=a\,(1-ax+a^2x^2-\ldots\pm a^nx^n\ldots).$$

On nomme *Séries Récurrentes* celles dont chaque terme se déduit des précédens, en les multipliant par des quantités invariables ; ces multiplicateurs constituent ce qu'on

appelle l'*Echelle de relation*. Comme on peut ramener à la forme $\frac{a}{1+\alpha x}$, toute fraction rationnelle dont le dénominateur est du 1er. degré, on voit qu'*elle engendre toujours une série récurrente dont l'échelle de relation est le terme* $-\alpha x$.

Le *Terme général* (481), ou le $(n+1)^e$ terme est $\pm a\alpha^n x^n$; on prend le signe supérieur quand n est pair, l'inférieur lorsque n est impair. Puisque notre série est une progression par quotient, dont la raison est $-\alpha x$, il est très-aisé d'avoir la somme des $n+1$ 1ers. termes; ou le *Terme Sommatoire* $\int$ (487) : on trouve

$$\int = \frac{a(1 \pm \alpha^{n+1}x^{n+1})}{1+\alpha x};$$

on prend les mêmes signes que pour le terme général.

562. Si au contraire, la série $a(1-\alpha x+\ldots)$ étoit donnée ainsi que sa loi, il seroit aisé de trouver la fraction génératrice, qu'on nomme la *somme* entière de la série : en effet, le numérateur est le premier terme a, et le dénominateur est 1 — l'échelle de relation, ou $1+\alpha x$.

Par exemple, $\frac{2}{3-2x}$, en faisant $x=0$ donne $\frac{2}{3}$ pour 1er. terme; puis, mettant la proposée sous la forme $\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}x}$, on a $\frac{2}{3}x$ pour l'échelle de relation, et par conséquent, la série $\frac{2}{3}\{1+\frac{2}{3}x+(\frac{2}{3}x)^2+\ldots\ldots\}$ le terme général est $(\frac{2}{3})^{n+1}x^n$, et le terme sommatoire est.....
$\int = 2\,\frac{\{1-(\frac{2}{3}x)^{n+1}\}}{3-2x}$.

Réciproquement, si la série est donnée, le 1er. terme $\frac{2}{3}$ est le numérateur, et $1-\frac{2}{3}x$ est le dénominateur de la

fraction génératrice, qui est $\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}x}$ ou $\frac{2}{3-2x}$. Si donc $x=\frac{1}{2}$, on trouve 1 pour somme de la série suivante, continuée à l'infini $\frac{2}{3}\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\right\}$

563. Si on suppose $x=2$, on trouve de même -2 pour la somme de $\frac{2}{3}\left\{1+\frac{4}{3}+\frac{16}{9}+\ldots\right\}$ Ce résultat offre un paradoxe remarquable, car on ne conçoit pas comment la somme de plusieurs quantités positives peut être -2. Mais ceci s'explique en remarquant que la série étant *divergente* (485), on ne doit pas regarder la somme des 1ers. termes comme formant une portion de celle qu'on cherche, attendu que la somme des termes qu'on néglige peut être négative et même excéder celles des n premiers termes : c'est, en effet, ce qui arrive ici, où les termes négligés ont pour somme $\frac{2}{3-2x}-s$ ou $\frac{2\left(\frac{2}{3}x\right)^{n+1}}{3-2x}$, qui, pour $x=2$, devient $-2\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$.

En général, *lorsqu'une série est divergente, il faut l'employer en totalité*, parce que son ensemble représente la fonction dont elle est le développement.

564. Cherchons la valeur de la fraction 0,3333... on l'écrira sous la forme $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ou $\frac{3}{10}\left(1+\frac{x}{10}+\frac{x^2}{10^2}+\ldots\right)$, x étant $=1$. La fraction génératrice est $\frac{3}{10-x}$; donc $0,333\ldots\ldots=\frac{3}{10-1}=\frac{1}{3}$.

Soit p la période d'une fraction décimale, p étant composée de k chiffres, cette fraction équivaudra à. .... $\frac{p}{10^k}\left\{1+\frac{x}{10^k}+\frac{x^2}{10^{2k}}+\ldots\right\}$, x étant $=1$: or la fraction génératrice de cette série est $\frac{p}{10^k-1}$, résultat déja connu (52 et 101, 8°.).

565. Développons maintenant $\frac{a+bx}{1+\alpha x+\beta x^2}$, forme à laquelle on peut ramener toute fraction rationnelle du 2e. degré : on verra, comme n°. 561, qu'on peut l'égaler à $A+Bx+Cx^2$... Multipliant par $1+\alpha x+\beta x^2$, on trouve

$$a+bx=A+\left.\begin{matrix}B\\+A\alpha\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}C\\+B\alpha\\+A\beta\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}D\\+C\alpha\\+B\beta\end{matrix}\right|x^3\begin{matrix}+\ldots\\+\ldots\\+\ldots\end{matrix}$$

d'où $A=a$, $B+A\alpha=b$, $C+B\alpha+A\beta=0$, etc.

La 1re. donne la valeur de A qu'on auroit pu d'ailleurs trouver directement en faisant $x=0$ dans la fraction proposée; la 2e. donne $B=b-a\alpha$. Quant aux autres coefficiens C, D,.... sans nous arrêter à les déterminer, il est facile de voir que si M N P sont trois coefficiens successifs quelconques de notre série, ils sont liés entre eux par la relation $P+\alpha N+\beta M=0$, d'où $P=-\alpha N-\beta M$; en sorte qu'un coefficient se déduit toujours des deux qui le précèdent multipliés respectivement par $-\alpha$ et $-\beta$; ou plutôt, le développement *de toute fraction dont le dénominateur est* $1+\alpha x+\beta x^2$ *forme une série récurrente dont l'échelle de relation a deux termes*, $-\alpha x$, $-\beta x^2$: ce sont les quantités qui, ôtées de 1, forment ce dénominateur.

566. Réciproquement lorsque la loi de la série est donnée avec ses deux premiers termes, il est facile de retrouver la fraction génératrice ; car, les équations.... $A=a$ et $B+A\alpha=b$, où A et B sont connus, donnent a et b, et par conséquent le numérateur $a+bx$: le dénominateur est $=1$ moins les deux termes de l'échelle, ou $=1+\alpha x+\beta x^2$.

Par exemple, $\frac{2-4x}{x^2-x-2}$ a pour premiers termes

$-1+\frac{5}{2}x$; ce qui suit des valeurs de A et B, ou même de la division. De plus, en donnant à la proposée la forme $\frac{2x-1}{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2}$, on reconnoît que $-\frac{1}{2}x$ et $+\frac{1}{2}x^2$ sont les termes de l'échelle; donc

$$\frac{2-4x}{x^2-x-2}=-1+\frac{5}{2}x-\frac{7}{4}x^2+\frac{17}{8}x^3-\frac{31}{16}x^4+\ldots$$

Si au contraire on donne $-1+\frac{5}{2}x$, et l'échelle $-\frac{1}{2}x$ et $\frac{1}{2}x^2$; en faisant $A=-1$ et $B=\frac{5}{2}$, nos équations donnent $a=-1$ et $b=2$: le numérateur est $2x-1$, et le dénominateur $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2$. La somme de la série infinie $-1+\frac{5}{2}-\frac{7}{4}\ldots$ (dont l'échelle de relation est $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$) se trouve en faisant $x=1$ dans la fraction génératrice; cette somme est 1.

De même $x=5$ donne -1 pour somme entière de la série divergente $-1+\frac{25}{2}-\frac{175}{4}+\ldots$ dont l'échelle de relation est $-\frac{5}{2}$ et $\frac{25}{2}$. (*V.* n°. 563.)

567. Pour obtenir le terme général, on décomposera la fraction proposée (559) en deux autres $\frac{A}{1+mx}$ et $\frac{B}{1+nx}$, dont on sait trouver les développemens et les termes généraux (561). Ainsi la fraction ci-dessus $=\frac{2}{2-x}-\frac{2}{x+1}$, (560, 1°.). Les séries qui en résultent sont

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\ldots+(\frac{1}{2}x)^n\ldots \text{ et } -2\{1-x+x^2\ldots\pm x^n\ldots\}$$

chaque terme de la suite qu'engendre la fraction proposée est la somme des termes de même rang dans ces progressions; et le $(n+1)^e$ terme est $\left(\frac{1}{2^n}\pm 2\right)x^n$. Le signe supérieur a lieu seulement quand n est impair.

On verra de même que $\frac{1}{1-4x+3x^2}$ se décompose en $\frac{3}{2-6x}+\frac{1}{2x-2}$, ce qui produit les séries $\frac{3}{2}(1+3x+9x^2\ldots 3^n x^n)$ et $-\frac{1}{2}(1+x+x^2\ldots+x^n)$; donc le terme général cherché est $\frac{1}{2}x^n(3^{n+1}-1)$.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que *toute série récurrente, dont l'échelle de relation a deux termes, est décomposable en deux progressions par quotient*, de sorte que chaque terme résulte de l'addition de ses correspondans dans deux séries de la forme

$$M(1+kx+k^2x^2+\ldots),\quad N(1+lx+l^2x^2+\ldots)$$

On peut donc parvenir à ces séries composantes en cherchant directement à déterminer M, N, k et l. Ce procédé présente quelqu'avantage, sur-tout lorsque les facteurs du dénominateur sont irrationnels ou imaginaires.

Soit $A+Bx+Cx^2+$ etc., le développement donné de la fraction cherchée $\frac{a+bx}{1+\alpha x+\beta x^2}$; il est clair qu'en comparant on a

$$M+N=A,\quad Mk+Nl=B.$$

On seroit conduit à des calculs très-pénibles, si on prétendoit obtenir deux autres équations par la même voie $C=Mk^2+Nl^2;\ldots$ mais au lieu de cela, on use de cet artifice remarquable ; les coefficiens Mk^2 et Nl^2 des 3es. termes peuvent se mettre sous la forme suivante

$$Mk^2=Mk(k+l)-Mkl,\quad Nl^2=Nl(k+l)-Nkl;$$

en ajoutant on a

$$C=(k+l)(Mk+Nl)-kl(M+N)=(k+l)B-klA.$$

Ainsi on obtient le coefficient C en multipliant B par $k+l$, et A par $-kl$; or on sait qu'on l'auroit aussi en multipliant B par $-\alpha$, et A par $-\beta$; donc $k+l=-\alpha$ et $kl=\beta$, ce qui apprend que k et l sont les racines de l'équation $k^2+\alpha k+\beta=0$. On trouve cette équation en égalant à zéro le dénominateur $1+\alpha x+\beta x^2$ de la fraction génératrice, et mettant $\frac{1}{k}$ pour x. On en conclura M et N, et par suite le terme général $x^n(Mk^n+Nl^n)$ et les deux progressions.

Soit proposé $\frac{1}{1-2x+5x^2}=1+2x-x^2\ldots$ nous aurons $M+N=1$, $Mk+Nl=2$, $k+l=2$, $kl=5$; les racines de l'équation $k^2-2k+5=0$ sont $k=1+2\sqrt{-1}$, $l=1-2\sqrt{-1}$; ainsi $N=\frac{2+\sqrt{-1}}{4}$, $M=\frac{2-\sqrt{-1}}{4}$, et on obtient pour le terme général

$$\tfrac{1}{4}x^n\{(2-\sqrt{-1})(1+2\sqrt{-1})^n+(2+\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1})^n\},$$

expression d'où les imaginaires disparoissent.

568. Ces procédés ne sont plus applicables lorsque le dénominateur de la fraction proposée est un carré parfait; mais alors on a $\frac{a+bx}{(1+\alpha x)^2}$, qui équivaut à..... $(a+bx)(1+\alpha x)^{-2}$; or en développant $(1+\alpha x)^{-2}$ par la formule du binome (484), on a pour les termes de rang n et $(n+1)$, $\mp n\alpha^{n-1}x^{n-1}\pm(n+1)\alpha^n x^n$, en multipliant par $a+bx$, on trouve pour $(n+1)^e$ terme, qui est le terme général cherché

$$\pm\alpha^{n-1}x^n\{(n+1)a\alpha-nb\},$$

en prenant le signe supérieur lorsque n est pair, et l'inférieur dans le cas contraire.

C'est ainsi que le développement de $\frac{6+9x}{(1-3x)^2}$ a pour terme général $3^{n+1}x^n(3n+2)$: en faisant tour-à-tour $n=0, 1, 2, 3\ldots$ on obtient les divers termes de la série qui est $6+45x+216x^2+\ldots$.

Puisque $\frac{a+bx}{(1+\alpha x)^2}$ se décompose (560, III.) en

$$\frac{b}{\alpha(1+\alpha x)}+\left(a-\frac{b}{\alpha}\right)\cdot\frac{1}{(1+\alpha x)^2},$$

le développement n'est plus formé de deux progressions par quotient; et il est clair que ces séries sont

$$\frac{b}{\alpha}\left\{1-\alpha x+\alpha^2x^2\ldots\pm\alpha^n x^n\ldots\ldots\right\}$$

$$\left(a-\frac{b}{\alpha}\right)\left\{1-2\alpha x+3\alpha^2x^2\ldots\pm(n+1)\alpha^n x^n\right\}$$

ce qui fournit un nouveau moyen d'obtenir le terme général.

569. Il est aisé maintenant de trouver la somme d'une portion de série récurrente du second degré, puisqu'il s'agit simplement d'avoir cette somme pour deux progressions par quotient. Soit proposée, par exemple, la suite $-1+\frac{5}{2}x-\frac{7}{4}x^2+\frac{17}{8}x^3\ldots$ dont l'échelle de relation est $-\frac{x}{2}$ et $+\frac{x^2}{2}$, et qui se décompose en deux progressions $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\ldots$ et $-2(1-x+x^2\ldots)$. On a (144) pour la somme des n premiers termes $\frac{x^n-2^n}{2^{n-1}(x-2)}+\frac{2(\pm x^n\mp 1)}{x+1}$.

570. On raisonnera de même pour les fractions des degrés supérieurs au 2e.; et sans pousser ces considérations plus loin, on voit que le développement de la fraction

$\dfrac{a + bx + cx^2}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3}$ est une série récurrente dont l'échelle de relation est composée de trois termes...... $-\alpha x$, $-\beta x^2$ et $-\gamma x^3$. Et ainsi des autres fractions.

3. *Méthode inverse des Séries.*

571. Désignons par y une fonction de x développée en une série donnée ; la méthode qui apprend à en tirer la valeur de x ordonnée suivant les puissances de y, est celle qui va nous occuper ; on l'a nommée *Méthode inverse des Séries*, ou *Retour des Suites* : on en saisira mieux l'esprit par des appplications.

I. Soit proposée l'équation

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

et soit demandée la valeur de x exprimée en fonction de y. Supposons que, par le procédé qui va nous occuper bientôt, on se soit assuré que y ne peut recevoir que des exposans entiers et positifs ; on en conclura que la forme de la série cherchée est $x = Ay + By^2 + Cy^3 + \text{etc.}$ On ne met pas ici de terme sans y, parce que $x = 0$ doit donner $y = 0$. Dorénavant nous mettrons pour ce terme sa valeur qu'on peut toujours obtenir par le même moyen. D'après cela, si dans la série proposée on substitue pour x, x^2, x^3,.... cette suite, son carré, son cube, etc., on aura l'équation identique

$$\begin{aligned} y = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{etc.} \ldots \text{ pour } x \\ -\tfrac{1}{2}A^2y^2 - ABy^3 - \tfrac{1}{2}B^2y^4 - \text{etc.} \left.\begin{matrix} \\ - ACy^4 - \text{etc.} \end{matrix}\right\} \ldots -\tfrac{1}{2}x^2 \\ +\tfrac{1}{3}A^3y^3 + A^2By^4 + \text{etc.} \ldots \ldots + \tfrac{1}{3}x^3 \\ -\tfrac{1}{4}A^4y^4 - \text{etc.} \ldots , -\tfrac{1}{4}x^4 \end{aligned}$$

On la partage en diverses équations $A=1$, $B-\frac{1}{2}A^2=0$, $C-AB+\frac{1}{3}A^3=0$, etc..... D'où on conclut

$$A=\frac{1}{1},\ B=\frac{1}{1.2},\ C=\frac{1}{1.2.3},\ D=\frac{1}{1.2.3.4},\ \text{etc.}$$

de sorte qu'en substituant on trouve

$$x=\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

II. On verroit de même qu'en renversant la série

$$y=x-x^2+x^3-x^4+\text{etc.},$$

elle devient $x=y+y^2+y^3+y^4+$ etc.

III. La série $y=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2\ldots7}+$ etc. doit être renversée en supposant $x=Ay+By^3+Cy^5+$ etc. et omettant les puissances paires de y, ainsi que cela va être démontré ; on trouve par le calcul $A=1$, $B=\frac{1}{2.3}$, $C=\frac{1.3}{2.4.5}$, etc., d'où on tire.

$$x=y+\frac{1.y^3}{2.3}+\frac{1.3y^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5y^7}{2.4.6.7}+\frac{1.3.5.7y^9}{2.4.6.8.9}+\ldots$$

IV. En général soit $x=ay+by^2+cy^3+$ etc., on aura

$$y=\frac{x}{a}-\frac{bx^2}{a^3}+\frac{2b^2-ac}{a^5}x^3+\frac{5abc-a^2d-5b^3}{a^7}x^4+\ldots$$

Soit aussi $x=ay+by^3+cy^5+dy^7+$ etc., on a

$$y=\frac{x}{a}-\frac{bx^3}{a^4}+\frac{3b^2-ac}{a^7}x^5+\frac{8abc-a^2d-12b^3}{a^{10}}x^7+\ldots$$

572. La méthode que nous venons d'exposer donne lieu à deux difficultés ; la première consiste à prévoir la forme de la série cherchée ; la seconde tient à ce que la loi des coefficiens ne peut se déduire que par induction. Mais on

évite la première en représentant aussi les exposans par des lettres α, β, γ... qu'on détermine par la condition que chaque terme, après le calcul, en trouve d'autres de même exposant, avec lesquels il puisse être ordonné.

Soit $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots.$

on supposera $x = Ay^\alpha + By^\beta + Cy^\gamma + \ldots$ en ne mettant pas de terme sans y, parce que $x = 0$ doit donner $y = 0$: $\alpha\ \beta\ \gamma\ldots$ sont des exposans croissans et indéterminés. On cherchera x^2, x^3... et substituant, on remarquera que

1°. Les exposans de x dans la valeur de y étant en progression par différence, $\alpha\ \beta\ \gamma\ldots$, doivent jouir de la même propriété, puisqu'en formant x^2, x^3... les développemens satisferont encore à cette condition.

2°. Il suffira de déterminer α et β, puis on en conclura γ....

3°. Le terme du 2e. membre où y a le plus petit exposant est $\frac{1}{2}A^2y^{2\alpha}$; il doit s'ordonner avec le 1er. membre y^1; donc $2\alpha = 1$ et $\frac{1}{2}A^2 = 1$, d'où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $A = \sqrt{2}$.

4°. Les termes dont après ceux-ci les exposans sont moindres, étant $ABy^{\alpha+\beta}$ et $\frac{1}{3}A^3y^{3\alpha}$, en s'ordonnant conduisent à $\alpha + \beta = 3\alpha$, d'où $\beta = \frac{2}{2}$: ainsi la raison de la progression est $\frac{1}{2}$, et on doit supposer..............

$x = Ay^{\frac{1}{2}} + By^{\frac{2}{2}} + Cy^{\frac{3}{2}} + \ldots.$ on trouve enfin.........

$$x = y^{\frac{1}{2}}\sqrt{2} - \frac{2}{3}y + \frac{\sqrt{2}}{18}y^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{135}y^2 + \ldots.$$

Par la même raison, on voit que dans l'exemple III on ne doit introduire que des puissances impaires, et que pour $y = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}\ldots$, on doit supposer $x = Ay^{-2} + By^{-4} + Cy^{-6}\ldots$ Le calcul donne

$$x = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^4} + \frac{2}{y^6} - \frac{1}{y^8}\ldots\ldots$$

573. Si on avoit $y = a + bx + cx^2 \ldots$ il faudroit, pour plus de commodité dans le calcul, passer a dans le premier membre et diviser par b; car en supposant $\frac{y-a}{b} = z$, on auroit $z = x + \frac{c}{b}x^2 + \ldots$ il faudroit ensuite développer simplement x en fonction de z. Au reste, V. n°. 670.

4. *Séries Exponentielles et Logarithmiques.*

574. Cherchons à développer en série les fonctions *Transcendantes*, et prenons d'abord l'*Exponentielle* a^x. Pour cela, faisons $a = 1 + y$, puis employons la formule du binome; nous aurons $(1+y)^x = 1 + xy + x . \frac{x-1}{2} y^2 + \ldots$

Il est aisé de voir que, 1°. le terme sans x est 1.

2°. x n'a que des exposans entiers et positifs.

3°. Enfin en désignant par k le coefficient de x^1, on a cette série dont la nature même du calcul rend la loi manifeste

$$k = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots \ldots (1)$$

Supposons donc $a^x = 1 + kx + Ax^2 + Bx^3 + \ldots$ il s'agit de déterminer A, B... Remarquons que les coefficiens $k\,A\,B\ldots$ ne varient point avec x, de sorte qu'en changeant x en z, on a encore $a^z = 1 + kz + Az^2 + Bz^3 + \ldots$ en supposant que z surpasse x de i, ou $z = x + i$. Retranchant nos développemens, on a $a^z - a^x = a^x a^i - a^x$, ou

$$a^x(a^i - 1) = k(z - x) + A(z^2 - x^2) + B(z^3 - x^3).$$

Cette équation a ses deux membres divisibles par i ou $z - x$, puisque $i = 0$, ou $z = x$, les rend nuls. On

met ce facteur en évidence en substituant pour a^i sa valeur $1 + ki + Ai^2 + \ldots$ et on trouve en divisant par i

$$a^z(k+Ai+\ldots)=k+A(z+x)+B(z^2+zx+x^2)+\ldots$$

La loi résulte encore du calcul même, puisqu'on n'a (99) que des termes de la forme $\frac{z^n - x^n}{z-x} = z^{n-1} + xz^{n-2} + \ldots$ Comme tout ceci a lieu, quel que soit z, faisons $z=x$ ou $i=0$, nous aurons

$$\begin{aligned} ka^x &= k(1 + kx + Ax^2 + Bx^3 + \ldots) \\ &= k + 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + \ldots \end{aligned}$$

Comparant terme à terme, on trouve $A = \frac{k^2}{2}$, $B = \frac{k^3}{2.3}$, $C = \frac{k^4}{2.3.4} \ldots$ enfin on obtient

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{2.3} + \frac{k^4x^4}{2.3.4} + \ldots\ldots \quad (2)$$

série cherchée, et dont la loi est toujours évidente jusqu'à l'infini.

575. L'équation (1) fait connoître k lorsque a ou y est donné : pour résoudre le problême inverse, faisons $x=1$ dans (2), nous aurons

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^4}{2.3.4} + \ldots\ldots \quad (3)$$

En sorte que chaque valeur de a répond à une valeur connue de k, et réciproquement. C'est ainsi que $k=1$ donne pour la valeur correspondante de e,

$$e = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \ldots = 2,71828\ 18284\ 59\ldots$$

Il est vrai qu'il faut que nos séries soient convergentes pour résoudre ce double problême : il convient donc

d'obtenir une autre relation entre a et k, qui soit utile dans tous les cas. Pour cela, faisons $k = 1$ dans la série (2), a n'y sera plus arbitraire et prendra la valeur e que nous venons de déterminer, et il viendra

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots \quad (A).$$

Or k et x entrent de la même manière dans (2), de sorte que si on change ici x en k, on devra tomber sur la série (3) : donc on trouve entre e, a et k cette relation $a = e^k$.

Dans les calculs où les logarithmes sont appliqués à l'algèbre, on a coutume de préférer la base $e = 2,718\ldots$; on les nomme alors *Népériens*, du nom de l'inventeur des logarithmes dont on consacre ainsi la mémoire. On leur applique aussi la dénomination impropre de *Naturels* et d'*Hyperboliques* (*Voy*. n°. 748, II). Nous désignerons dorénavant ce système par le signe *log*, pour le distinguer. Ainsi, le signe Log x désignera un système dont la base est arbitraire; Lx supposera la base 10, ou les logarithmes de Briggs employés dans les tables; enfin pour $\log x$ la base est $e = 2,7182818\ldots$

576. De l'équation $a = e^k$, on tire, en prenant les logarithmes de part et d'autre dans un système quelconque,

$$\text{Log}\, a = k\, \text{Log}\, e \ldots\ldots \quad (4);$$

donc, 1°... $k = \frac{\text{Log}\, a}{\text{Log}\, e} = \log a = \frac{1}{\text{Log}\, e}$,

suivant que la base est quelconque, est e ou a.

2°. .... $\text{Log}\, e = \frac{1}{k} = \frac{1}{\log a}$.

3°. En mettant pour k sa valeur $\log a$ dans (2), il vient

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{x^2\log^2 a}{2} + \frac{x^3\log^3 a}{2.3} + \ldots \quad (B).$$

4°. Si dans (4), on substitue pour k sa valeur (1), et $1+y$ pour a, on obtient

$$\text{Log}\,(1+y) = \text{Log}\,e\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots\right), \quad (C);$$

et s'il s'agit de logarithmes népériens, comme $\log e = 1$,

$$\log\,(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots \quad (D).$$

Les séries A et B servent à trouver le nombre a^x ou e^x qui répond à un logarithme donné quelconque ou népérien : les suites C et D résolvent le problême inverse ; mais il faut que ces développemens soient convergens (563).

577. En comparant les formules C et D, on trouve

$$\text{Log}\,(1+y) = \text{Log}\,e \times \log\,(1+y):$$

donc *dans tout système, le logarithme d'un nombre est le produit de son logarithme népérien par le module*; c'est ainsi qu'on nomme (152) le facteur Log e, qui est constant pour tous les logarithmes d'un même système. Réciproquement on change les logarithmes népériens en ceux d'un autre système en les divisant par le module.

578. Si nous voulons employer la formule C au calcul des tables de logarithmes, il faudra la rendre convergente, et déterminer le module Log e. Pour cela, changeons y en $-y$ dans C, il viendra la série négative . . . . $\text{Log}\,(1-y) = -\text{Log}\,e\left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\ldots\right)$; retranchant de C, on a Log $(1+y)$ — Log $(1-y)$; ou

$$\text{Log}\,\frac{1+y}{1-y} = 2\,\text{Log}\,e\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \ldots\right).$$

Pour faire servir cette série à la détermination du logarithme d'un nombre quelconque positif N, il faudra mettre pour y sa valeur $\frac{N-1}{N+1}$ tirée de $N=\frac{1+y}{1-y}$; donc y sera <1 et notre série est déja convergente. Mais comme elle l'est d'autant moins que N est plus grand, on évite cet inconvénient en faisant $\frac{1+y}{1-y}=\frac{z}{z-1}$, d'où. . . .

$y=\frac{1}{2z-1}$. Mettons $\frac{1}{\log a}$ pour Log e et cette valeur de y, le premier membre deviendra Log $\left(\frac{z}{z-1}\right)$, ou Log z — Log $(z-1)$, c.-à-d. la différence Δ entre les logarithmes de deux nombres consécutifs z et $z-1$; ainsi

$$\Delta=\frac{2}{\log a}\left\{\frac{1}{2z-1}+\frac{1}{3(2z-1)^3}+\frac{1}{5(2z-1)^5}+\ldots\right\} \quad (E).$$

On peut maintenant calculer tous les logarithmes népériens, puisque log a devient log e ou 1. Soit d'abord $z=2$, comme log $1=0$, (150, 1°.), Δ devient

$$\log 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}\ldots\right);$$

d'où. . . . . log 2 = 0,69314718
de même $z=3$ donne pour Δ une valeur
qui ajoutée à log 2, conduit à. . . . log 3 = 1,09861229
en doublant log 2, il vient. . . . . . . log 4 = 1,38629436
$z=5$ conduit de même à. . . . . log 5 = 1,60943791

et ainsi de suite. On remarquera qu'à mesure que z croît, la série devient plus convergente : lorsque z surpasse 100, le premier terme suffit pour donner le logarithme avec 7 décimales.

Venons-en aux logarithmes tabulaires ; il suffira de cal-

culer $\log a$, ce qui n'a plus de difficulté, puisque les logarithmes népériens sont tous connus. Par exemple, si la base du système est 5, le module Log e est. . . $\frac{1}{\log a} = \frac{1}{\log 5} = 0{,}6213349$. Dans les tables ordinaires, la base est 10, et le module est $\frac{1}{\log 10}$; en ajoutant log 2 à log 5, on a pour module $\frac{1}{2{,}302585 09}$ valeur qui rend encore la série ci-dessus plus convergente. Nous aurons donc pour la base 10, M étant le module ou $L\,e$,

$$M = 0{,}4342944819 \text{ et } L\,M = \bar{1}{,}63778\ 43113\ 00536.$$

5. *Séries Circulaires.*

579. Proposons-nous de développer $\sin x$ et $\cos x$ en séries, le rayon étant $= 1$, 0 et 1 sont les valeurs du terme constant dans chacun de ces développemens, qui ont par conséquent la forme

$$\sin x = Ax^a + Bx^b + \ldots \quad \cos x = 1 + Mx^m + \ldots$$

divisons le 1er. par x; nous aurons. . . . . $\frac{\sin x}{x} = Ax^{a-1} + Bx^{b-1} \ldots$. Or, on sait que plus x décroît, plus cet arc approche de son sinus (246), en sorte que 1 est la limite de $\frac{\sin x}{x}$; la valeur de ce rapport doit donc être de la forme $1 - \alpha$, α décroissant indéfiniment avec x; la méthode des limites prouve que $Ax^{a-1} +$ etc., ne peut être $= 1 - \alpha$, à moins qu'on n'ait, 1°. $a = 1$, en sorte qu'il n'y ait aucun exposant négatif pour x; 2°. $A = 1$; 3°. enfin en mettant pour

sin x et cos x leurs valeurs $x + \ldots$ et $1 + Mx^m + \ldots$ dans $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on trouvera $m = 2$.

Concluons de là que

$$\sin x = x + Bx^b + Cx^c + \ldots$$
$$\cos x = 1 + Mx^2 + Nx^n + \ldots$$

Il s'agit maintenant de déterminer les exposans et les coefficiens. Observons qu'en changeant x en $x + h$ dans $P \sin x + Q \cos x$, et effectuant le développement de deux manières, les résultats doivent être identiques, en sorte que les coefficiens des mêmes puissances de h doivent l'être aussi. C'est ce double calcul que nous allons exécuter en nous bornant à la première puissance de h.

La quantité $P \sin x + Q \cos x =$

$$P(x + Bx^b + Cx^c + \ldots) + Q(1 + Mx^2 + Nx^n + \ldots)$$

Changeons x en $x + h$, et ne prenons que le coefficient de la première puissance de h; x donnera 1; x^b deviendra $(x + h)^b$, et donnera bx^{b-1}; pour x^c, on aura cx^{c-1}, etc. Donc ce coefficient est

$$P(1 + bBx^{b-1} + cCx^{c-1} + \ldots) + Q(2Mx + nNx^{n-1} + \ldots).$$

D'un autre côté, reprenons $P \sin x + Q \cos x$, et mettons $x + h$ pour x, nous aurons

$$P(\sin x \cos h + \sin h \cos x) + Q(\cos x \cos h - \sin x \sin h).$$

Puis, remplaçons sin h et cos h par leurs valeurs développées $h + Bh^b + \ldots$, $1 + Mh^2 + \ldots$; mais comme nous n'avons besoin que du coefficient de h^1, il est visible qu'il suffit de mettre h pour sin h et 0 pour cos h; ce qui donne pour ce coefficient $P \cos x - Q \sin x$. Substituons maintenant pour cos x et sin x leurs valeurs, nous aurons

$$P(1 + Mx^2 + Nx^n + \ldots) - Q(x + Bx^b + Cx^c \ldots).$$

L'identité entre nos deux coefficiens de h^1, devant avoir lieu quels que soient P et Q, on a

$$1 + bBx^{b-1} + cCx^{c-1} + \ldots = 1 + Mx^2 + Nx^n + \ldots$$
$$2Mx + nNx^{n-1} + pPx^{p-1} + \ldots = -x - Bx^b - Cx^c - \ldots$$

Ces séries offrent une loi facile à saisir, et qui résulte du calcul même. En comparant d'abord les exposans, on trouve

$$b - 1 = 2, \quad n - 1 = b, \quad c - 1 = n, \quad p - 1 = c, \ldots$$

d'où $b = 3$, $n = 4$, $c = 5, \ldots$ la série du sinus ne contient donc que des puissances impaires, celles du cosinus sont paires (*). Les coefficiens comparés donnent

$$2M = -1, \; 3B = M, \; 4N = -B, \; 5C = N, \ldots$$

donc $M = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2.3}$, $N = \frac{1}{2.3.4}$, $C = \frac{1}{2.3.4.5}, \ldots$ enfin il vient les séries

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots \quad (F)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots \quad (G)$$

dont la loi est connue à l'indéfini, parce qu'elle est visible d'après le calcul ci-dessus.

(*) Si on eût supposé que les exposans a, b, ... sont tous entiers et positifs, comme en changeant x en $-x$ le sinus doit conserver la même valeur avec un signe différent, il en auroit résulté que le développement de $\sin x$ ne contient que des puissances impaires : de même on verra que $\cos x$ n'en contient que des paires ; ainsi

$$\sin x = x + Bx^3 + Cx^5 + \ldots \quad \cos x = 1 + Mx^2 + Nx^4 + \ldots$$

La démonstration ci-dessus seroit alors devenue beaucoup plus simple ; mais nous l'avons jugée plus rigoureuse de cette manière.

580. Il résulte de ces séries diverses formules très-importantes, et que nous allons en déduire.

1°. En les comparant à l'équation A, on voit que leur somme produit la série de e^x, aux signes près de deux en deux rangs. Or, si on change x en $\pm x\sqrt{-1}$ dans le développement de e^x, cette anomalie des signes devra disparoître, puisque les puissances de $\sqrt{-1}$, sont périodiquement $\sqrt{-1}$, -1 $-\sqrt{-1}$ et $+1$; il est donc évident qu'on aura

$$e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sqrt{-1}.\sin x \ldots \quad (H).$$

2°. En ajoutant et soustrayant les deux équations comprises dans la formule (H), on obtient

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \ldots (I)$$

expressions du sinus et du cosinus d'un arc x, qu'on ne doit regarder que comme un résultat analytique, dans lequel les imaginaires ne sont qu'apparentes, et d'où elles doivent disparoître par le calcul même. On en tire

$$\tang x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{\sqrt{-1}(e^{2x\sqrt{-1}} + 1)},$$

3°. En changeant x en nx, l'équation (H) devient

$$e^{\pm nx\sqrt{-1}} = \cos nx \pm \sqrt{-1}.\sin nx;$$

or le 1er membre est la puissance n de celui de la même équation (H); donc on a, quel que soit n,

$$\cos nx \pm \sqrt{-1}.\sin nx = (\cos x \pm \sqrt{-1}.\sin x)^n \ldots \quad (K).$$

4°. En employant les logarithmes, on tire de l'équation (H)

$$\pm x\sqrt{-1} = \log(\cos x \pm \sqrt{-1}.\sin x);$$

si on retranche l'une de l'autre, les deux équations comprises dans celle-ci, on a

$$2x\sqrt{-1}=\log\left(\frac{\cos x+\sqrt{-1}.\sin x}{\cos x-\sqrt{-1}.\sin x}\right)=\log\left(\frac{1+\sqrt{-1}.\operatorname{tang} x}{1-\sqrt{-1}.\operatorname{tang} x}\right),$$

à cause de $\sin x=\cos x.\operatorname{tang} x$. Or, le développement de cette fonction a été obtenu précédemment, puisqu'on a donné (578) celui de $\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$; il s'ensuit qu'en supprimant le facteur $2\sqrt{-1}$, on a

$$x=\operatorname{tang} x-\frac{\operatorname{tang}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tang}^5 x}{5}-\frac{\operatorname{tang}^7 x}{7}+\text{etc.}\dots \quad (M)$$

expression de l'arc développé en fonction de la tangente. Appliquons maintenant ces formules.

581. Soit a un arc du cercle dont le rayon $=1$, et dont $\frac{1}{5}$ soit la tangente : la formule L, n°. 359, donne pour celle du double de cet arc, $\operatorname{tang} 2a=\frac{5}{12}$, puis $\operatorname{tang} 4a=\frac{120}{119}$. Soit B cet arc, ou $\operatorname{tang} B=\frac{120}{119}$: il surpasse l'arc de 50° dont la tangente est 1, et on a pour la différence de ces arcs

$$\operatorname{tang}(B-50°)=\frac{\operatorname{tang} B-1}{1+\operatorname{tang} B}=\frac{1}{239}=\operatorname{tang} A.$$

On peut donc regarder l'arc de 50° ou $\frac{1}{4}\pi$, comme la différence de deux arcs B et A dont les tangentes sont $\frac{120}{119}$ et $\frac{1}{239}$. Si on met tour à tour $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{239}$ pour $\operatorname{tang} x$, en quadruplant le 1er. résultat, on aura les longueurs des arcs $B=4a$ et A, et par suite leur différence ou $\frac{1}{4}\pi$. Donc, il vient pour le rapport approché π du diamètre à la circonférence

$$\pi=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\dots\right)$$
$$-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\dots\right).$$

Cette série très-convergente, a été donnée par Machin, géomètre anglais : elle conduit d'une manière fort simple à la valeur de π, n°. 320.

582. Les formules F et G servent à la formation des tables de sinus, cosinus...; car x désigne alors la longueur d'un arc, qui est une partie commensurable du quadrans. Soit donc q le rapport de ces arcs, ou celui du nombre de degrés de l'un à 100°, on a $x = cq$, c désignant la longueur du quadrans, ou.......... $c = 1,57079\ 63267\ldots$; donc

$$\sin x = cq - \frac{c^3 q^3}{1.2.3} + \ldots, \cos x = 1 - \frac{c^2 q^2}{1.2} + \frac{c^4 q^4}{1.2.3.4} \text{etc.}$$

Ces séries sont convergentes puisque q est < 1; ainsi pour avoir le sinus du $\frac{1}{3}$ du quadrans, on fera $q = \frac{1}{3}$, pour celui de 5°, on fera $q = \frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$, etc.

583. Dans la formation des tables, on ne comprend pas les sinus, cosinus,... mais leurs logarithmes; or, on peut obtenir directement ces logarithmes, par le procédé suivant.

Les arcs sont disposés dans les tables suivant une progression par différence, dont δ désignera la raison; un arc quelconque x est donc un nombre n de fois l'arc δ ou $x = n\delta$; la série (F) devient donc

$$\sin(n\delta) = n\delta\left(1 - \frac{n^2\delta^2}{2.3} + \text{etc.}\right).$$

Si donc on fait $\quad y = \dfrac{n^2\delta^2}{2.3} - \dfrac{n^4\delta^4}{2.3.4.5} + \text{etc.}$

on a $\quad \sin(n\delta) = n\delta(1-y)$;

donc $L\sin(n\delta) = L(n\delta) - m\left(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \text{etc.}\right)$

m désignant le module Le, (p. 157) ; en remettant pour y sa valeur, on trouve

$$L\sin(n\delta) = L(n\delta) - \left(\frac{m\delta^2}{2.3}\right)n^2 - \frac{m\delta^4}{2^2.3^2.5}n^4 - \text{etc.}$$

En raisonnant de même pour cos x, on a

$$L\cos(n\delta) = -\left(\frac{m\delta^2}{2}\right)n^2 - \left(\frac{m\delta^4}{3.4}\right)n^4 - \left(\frac{m\delta^6}{3^2.5}\right)n^6 \text{etc.}$$

Représentons par A, B, ... A', B', C', ... les coefficiens de n^2, n^4, ... ces séries deviennent

$$L\sin(n\delta) = L\,n\,\delta - (An^2 + Bn^4 \ldots)$$
$$L\cos(n\delta) = -(A'n^2 + B'n^4 + C'n^6 \ldots).$$

Les coefficiens A, B, ... A', B'... sont constans et faciles à calculer d'avance. Dans les Tables de Borda $\delta = 10''$, ainsi δ est la 100 000e. partie du quadrans, et comme (320) on connoît $L\pi$, on trouve $L\delta = \bar{5},19611\ 9877$, en ne poussant le calcul que jusqu'à 9 décimales. De plus, le module m et son logarithme sont connus (p. 157) ; on a donc le tableau suivant :

Pour les sinus.	*Pour les cosinus.*
$L\delta = \bar{5},19611\ 9877$	$LA' = \overline{11},72899\ 4069$
$LA = \overline{11},25187\ 2815$	$LB' = \overline{21},34308\ 2573$
$LB = \overline{22},16699\ 1314$	$LC' = \overline{31},16129\ 1059$

Comme ici le rayon est $= 1$, et que pour éviter les logarithmes négatifs, on suppose dans les tables $LR = 10$, il faudra ajouter 10 au logarithme trouvé.

Cherchons, par exemple, le log. sin. 5°, comme 5°. $= 5000 \times 10''$, on a $n = 5000$; d'où

$2Ln = \bar{7},39794\ 0008$
$LA = 11,25187\ 2815$
$\bar{4},64981\ 2823$ qui est le log. de 0,00044 6491
$4Ln = \bar{14},79588\ 0016$
$LB = 22,16699\ 1314$
$\bar{8},96287\ 1330$ qui est le log. de 0,00000 0092
Somme.................... = 0,00044 6583

Complément de cette somme.. = $\bar{1}$,99955 3417
$L\delta$ augmenté de 10.......... = 5,19611 9877
Ln .... = 3,69897 0004
Donc L sin. 5°.............. = 8,89464 3298

On trouveroit de même L cos 5°. = 9,99865 9147 : on en concluroit ensuite, par la soustraction, les logarithmes de la tangente et de la cotangente.

On ne peut étendre l'usage de cette table à tous les arcs, parce que, n étant de plus en plus grand, les séries deviennent peu convergentes : en se bornant ainsi aux trois 1^{rs}. termes et à 9 décimales, on peut calculer les sinus et cosinus jusqu'à l'arc de 15°. De plus, la formule $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ donne........................ $L \sin 2x = L\, 2 + L \sin x + L \cos x - 10$; elle sert à déterminer tous les sinus de rang pair : quant aux autres, on emploie la formule suivante.

En divisant par $\sin x$ la valeur de $\sin(x + \delta)$, on obtient $\cos\delta + \sin\delta.\dfrac{\cos x}{\sin x}$ ou $\cos\delta\,(1 + \cot x.\operatorname{tang}\delta)$, donc on a

$$L\left(\frac{\sin(x+\delta)}{\sin x}\right) = L\cos\delta + m\left\{\cot x \operatorname{tang}\delta - \frac{\cot^2 x \operatorname{tang}^2\delta}{2}\ldots\right\}.$$

Or le 1er. membre est $L\sin(x+\delta) - L\sin x$, ou la différence Δ entre deux logarithmes consécutifs : de sorte

que si on introduit le rayon R, au lieu de l'unité (350,3°.), on trouve

$$\Delta = L\cos\delta + \left(\frac{m\ \text{tang}\ \delta}{R}\right)\cot x - \left(\frac{m\ \text{tang}^2\delta}{2R^2}\right)\cot^2 x + \text{etc.}$$

Cette série est due à M. Delambre, (*Voyez* la préface des Tables de Borda). Elle est de la forme. . . . . . . $\Delta = A + B\cot x - C\cot^2 x + \text{etc.}$, A, B, . . . étant des constantes qu'on peut calculer d'avance. Ainsi, lorsque $\delta = 10''$, $LR = 10$, le 1er. terme A ou $L\cos\delta = 0$, lorsqu'on ne veut que 9 décimales et le suivant suffit : on a

$$\Delta = A\cot x,\ \text{formule où}\ LA = \overline{16},83290\ 4188,$$

en changeant δ en $-\delta$, on auroit sin $(x - \delta)$.

On sait que sin $50° = \frac{R}{\sqrt{2}}$ et tang. $50° =$ cot. $50° = R$; ainsi on pourra trouver les logarithmes des sinus de 50° 10'' et 49° 99' 90'' ; et, comme ces arcs, que nous désignerons par α et β, sont complémens l'un de l'autre, on a sin $\alpha = \cos\beta$: on en déduit les tangentes et cotangentes de α et β. Voici le calcul.

$$LA = \overline{16},83290\ 4188$$
$$L\cot 50° = 10$$
$$LA = \bar{6},83290\ 4188 \quad \text{d'où}\ \Delta = 0,00000\ 6806$$

	$L\sin 50° =$	9,84948 5002
On a, en ajoutant,	$\cos\beta =$	9,84949 1808
et en retranchant,	$L\sin\beta = L\cos\alpha =$	9,84947 8196
Donc en soustrayant ces résultats, on a	$L\ \text{tang}\ \alpha = L\cot\beta =$	10,00001 3612
	$L\cot\alpha = L\ \text{tang}\ \beta =$	9,99998 6388

On calculera de même les sinus, cosinus, etc. des arcs complémentaires 50° 20'' et 49° 99' 80'', et ainsi de suite,

en allant jusqu'à 85° d'une part, et 15° de l'autre. On peut aussi vérifier les résultats d'espace en espace par les procédés connus (p. 340, t. I), ou en prenant une autre valeur de δ qui fasse retomber sur les mêmes arcs.

584. Si on suppose dans l'équation (H) que $x = k\pi$, k étant entier et quelconque, comme sin $x = 0$ et cos $x = +1$, ou -1, suivant que k est pair ou impair, on trouve

$$e^{\pm k\pi\sqrt{-1}} = +1, \text{ ou} = -1;$$

d'où $\pm k\pi\sqrt{-1} = \log 1$, ou $= \log -1$; multipliant par le module m, et ajoutant $L\,a$, on a

$$L\,a \pm km\pi\sqrt{-1}$$

pour la valeur du logarithme de a, ou de $-a$, k étant un nombre quelconque pair pour La, et impair pour $L-a$; donc *tout nombre a, dans le même système, une infinité de logarithmes, qui sont tous imaginaires s'il est négatif, et s'il est positif, un seul est réel* (*).

585. En développant le 2e. membre de l'équation (K), et réunissant les termes où sin x est élevé à des puissances impaires, on obtient un résultat de la forme......... cos $nx + \sqrt{-1}$. sin nx $P + Q\sqrt{-1}$; or, les termes réels ne pouvant détruire les imaginaires (494), cette équation se décompose en deux autres, cos $nx = P$,

(*) De $L(a)^2 = L(-a)^2$ on tire $2\,La = 2\,L(-a)$; il ne faudroit point en conclure, comme le prétendoit d'Alembert, que tout nombre positif a le même logarithme que s'il étoit négatif. Car il suit de notre formule que le logarithme de a est $La \pm km\pi\sqrt{-1}$, et $La \pm lm\pi\sqrt{-1}$, k et l étant pairs : en ajoutant, on trouve donc $2\,La \pm (k+l)m\pi\sqrt{-1}$ pour le double du logarithme de a. On auroit de même....... $2\,La \pm (k'+l')m\pi\sqrt{-1} = 2\,L-a$, k' et l' étant impairs : il est aisé de voir que cette dernière expression est comprise dans l'autre, tandis que la réciproque n'a pas lieu.

et sin $nx = Q$; donc quel que soit n

$$\cos nx = c^n - \frac{n(n-1)}{2}c^{n-2}s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}c^{n-4}s^4 - \text{etc.}$$

$$\sin nx = nc^{n-1}s - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}c^{n-3}s^3 + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{2.3.4.5}c^{n-5}s^5 \text{etc.}$$

s étant le sinus et c le cosinus de l'arc x; ainsi

$\sin 2x = 2sc$	$\cos 2x = c^2 - s^2$
$\sin 3x = 3sc^2 - s^3$	$\cos 3x = c^3 - 3cs^2$
$\sin 4x = 4sc^3 - 4cs^3$	$\cos 4x = c^4 - 6c^2s^2 + s^4$
$\sin 5x = 5sc^4 - 10s^3c^2 + s^5$	$\cos 5x = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4$
etc.	etc.

on en déduiroit aisément les tangentes et cotangentes de $2x$, $3x$, ... nx.

586. Proposons-nous au contraire de développer sin x et cos x suivant les sinus et cosinus des arcs $2x$, $3x$, $4x$; .... Pour cela soit

$$\cos x + \sqrt{-1}.\sin x = y,\ \cos x - \sqrt{-1}.\sin x = z,$$

d'où $\quad 2\cos x = y + z,\ 2\sqrt{-1}\sin x = y - z$:

en élevant à la puissance m, et remarquant que $yz = 1$, on trouve

$$2^m \cos^m x = y^m + my^{m-2} + m\frac{m-1}{2}y^{m-4}\ldots + Py^{m-2m}$$

$$(2\sqrt{-1})^m \sin^m x = y^m - my^{m-2} + m\frac{m-1}{2}y^{m-4}\ldots \pm Py^{m-2m};$$

mais l'équation (K) donne $y^k = \cos kx + \sqrt{-1}.\sin kx$; on peut donc mettre pour y^m, y^{m-2}, ... leurs valeurs. Mais on remarque que dans la première les imaginaires doivent se détruire, ce qui revient à faire $y^k = \cos kx$; il en seroit de même de la seconde si l'exposant m étoit tel que $(\sqrt{-1})^m$ fut réel ; c'est, au reste, un fait dont

on peut s'assurer directement par le calcul. Ainsi on a

$$2^m \cos^m x = \cos mx + m \cos(m-2)x$$
$$+ m.\frac{m-1}{2}\cos(m-4)x \ldots + P\cos(m-2n)x$$

$$(2\sqrt{-1})^m \sin^m x = \cos mx - m\cos(m-2)x$$
$$+ m.\frac{m-1}{2}\cos(m-4)x \ldots \pm P\cos(m-2n)x$$

et si $(\sqrt{-1})^m$ n'est pas réel, il faut, au contraire, pour que les termes réels disparoissent, faire $y^k = \sqrt{-1}.\sin kx$: donc

$$\frac{(2\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}}\sin^m x = \sin mx - m\sin(m-2)x$$

$$+ m\frac{m-1}{2}\sin(m-4)x \ldots \pm P\sin(m-2n)x$$

Jusqu'ici m est quelconque; les coefficiens sont ceux du binome, P en est le terme général.

Mais lorsque m est un nombre entier, les séries se terminent; et tous les termes pour lesquels $2n$ est $> m$, ayant des arcs négatifs, il s'ensuit que ces termes sont positifs jusqu'au milieu du développement, et que tous les suivans sont négatifs; il faut alors se rappeler que $\cos - \alpha = \cos \alpha$ et $\sin - \alpha = - \sin \alpha$. On voit de plus que les termes également éloignés des extrêmes sont égaux; car celui de rang $(n+1)$ à partir de la fin, ayant $m-n$ termes avant lui, le terme général devient $P \cos - (m-2n)$, ou $P \sin - (m-2n)$; on sait d'ailleurs que le coefficient P ne change pas (481, 4°.). Ainsi, les termes de rang $(n+1)$ à partir des deux extrémités, sont les mêmes, puisque le sinus a seul changé de signe, et que les signes alternent dans la dernière série. Ainsi, en ajoutant les termes égaux, et divisant par 2, on a

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + m\cos(m-2)x + m.\frac{m-1}{2}\cos(m-4)x + \ldots$$

$$\pm 2^{m-1}\sin^m x = \cos mx - m\cos(m-2)x + m.\frac{m-1}{2}\cos(m-4)x + \ldots$$

$$\pm 2^{m-1}\sin^m x = \sin mx - m\sin(m-2)x + m.\frac{m-1}{2}\sin(m-4)x + \ldots$$

séries qui ne doivent s'étendre que jusqu'à ce qu'on rencontre un arc négatif.

Dans la 1re., si m est pair, comme il y avoit $m+1$ termes dans notre développement ci-dessus, celui du milieu n'a pu être double ; ainsi on ne devra prendre que la moitié du dernier terme, lequel est sans cosinus.

La 2e. ou la 3e. ont lieu suivant que m est pair ou impair; et, comme les puissances de $\sqrt{-1}$ sont périodiquement $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$ et $+1$, on doit prendre le signe $+$ lorsque m est de la forme $4k$ ou $4k+1$; le signe $-$ s'emploie lorsque m est $2k$ ou $2k+1$. Dans la seconde, on ne devra prendre que la moitié du dernier terme, qui est dégagé de cosinus par la même raison que précédemment.

On peut donc former les tableaux suivans :

$2\cos^2 x = \cos 2x + 1$;
$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$;
$8\cos^4 x = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$;
$16\cos^5 x = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x$;
etc.

$2\sin^2 x = -\cos 2x + 1$;
$4\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x$;
$8\sin^4 x = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$;
$16\sin^5 x = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x$;
etc.

LIVRE SIXIÈME.

ANALYSE APPLIQUÉE AUX TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

1. *Notions fondamentales.*

7. 587. Trois plans *AOC AOB BOC* qui passent par le centre de la sphère, la coupent suivant des grands cercles qui forment un *triangle sphérique ABC*; on a aussi la pyramide *AOBC*. L'angle *A* du triangle est celui que forment deux tangentes aux arcs *AB AC*, ou l'angle dièdre (271) *BAOC*. L'arc ou *côté AB* mesure l'angle plan *AOB*.

Les problêmes de la résolution des triangles sphériques reviennent à leurs analogues pour la pyramide *AOBC*, puisque les angles dièdres de la pyramide sont les angles du triangle, et les angles plans en sont les côtés. Nous désignerons les côtés par *a*, *b*, *c*, et les angles opposés par *A*, *B*, *C*.

Il s'agit de trouver trois des six angles ABC abc, étant donnés trois d'entre eux.

Il peut arriver qu'un triangle sphérique ait des quadrans pour les trois côtés; c'est ce qu'on voit aisément en coupant par un plan l'un des angles trièdres qui forment un parallélipipède rectangle.

La somme des côtés d'un triangle sphérique est moindre que quatre droits (280), ou $a+b+c<4D$.

588. Coupons le tétraèdre O par des plans perpendiculaires aux trois arêtes ; ils détermineront un autre tétraèdre O' : leurs faces seront perpendiculaires deux à deux. Or, dans le quadrilatère $AOBA'$, l'angle plan O est supplément de $AA'B$, qui mesure l'angle dièdre $AA'O'B$: il en seroit de même des autres angles en O, ainsi que des angles plans en O' relativement aux angles dièdres du tétraèdre proposé. Donc l'un de ces tétraèdres a *chacun de ses angles plans supplément d'un angle dièdre dans l'autre* ; c'est pour cela qu'on le nomme *Tétraèdre supplémentaire*. 8.

Il est aisé de voir d'après cela que, 1°. les six problèmes de la trigonométrie sphérique sont réduits à trois, puisque si on donne, par exemple, les trois angles $A\ B\ C$, et qu'on cherche les côtés $a\ b$ et c, on résoudra le triangle qui a pour côtés les supplémens $a'\ b'\ c'$ de $A\ B\ C$; et, lorsqu'on aura trouvé les angles $A'B'C'$ de ce triangle, leurs supplémens seront les côtés cherchés $a\ b\ c$.

2°. Chaque angle dièdre étant moindre que deux droits, la *somme des angles d'un triangle sphérique est moindre que six droits* ; mais *elle est plus grande que deux droits*, car la somme $a'+b'+c'$ des côtés du triangle supplémentaire est moindre que quatre droits, ou $<4D$; prenant les supplémens, on aura

$$6D-(a'+b'+c')>2D, \quad \text{ou } A+B+C>2D$$

589. D'un point quelconque A de l'arête AO, menons AD perpendiculaire sur le plan BOC du tétraèdre O ; puis $DH\ DC$ perpendiculaires sur $OB\ OC$; enfin $AH\ AC$, qui le seront aussi à ces lignes (266, 2°.). On voit que les angles $ACD\ AHD$ mesurent les angles 9.

9. dièdres désignés par C et B : de même les angles plans en O sont $AOB = c$, $AOC = b$, $BOC = a$. Cela posé, on tire des triangles ACO ACD rectangles, l'un en C, l'autre en D,

$$AC = AO \sin AOC = AO \sin b,$$
$$AD = AC \sin ACD = AO \sin C \sin b.$$

De même, les triangles AOH ADH rectangles en H et D, donnent

$$AH = AO \sin AOB = AO \sin c,$$
$$AD = AH \sin AHD = AO \sin B \sin c.$$

Égalant ces valeurs de AD, on a $\sin B \sin c = \sin C \sin b$. Donc en général

$$\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \qquad \ldots (1)$$

les sinus des angles d'un triangle sphérique sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.

9. 590. Menons CE perpendiculaire sur OB, et DF sur CE; l'angle DCF sera $= EOC = a$, (195, 7°.). Or les triangles rectangles AOC ACD et FCD donnent

$$AC = AO \sin b, \; DC = AC \cos C = AO \sin b \cos C;$$

enfin $\quad FD = DC \sin a = AO \sin a \sin b \cos C.$

D'un autre côté $\quad OH = OE + FD,$

ou $AO \cos c = OC \cos a + FD = AO \cos a \cos b + FD.$

Donc (*) $\quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \ldots (2).$

Cette équation appliquée au triangle supplémentaire,

(*) Il seroit aisé de prouver que les équations 1 et 3 sont une conséquence de cette proposition : en sorte qu'elle doit être regardée comme le fondement unique de toute la Trigonométrie sphérique. V. Jour. de l'Ec. polyt. n°. 6, p. 281.

devient, en y mettant pour les côtés $a\ b\ c$, $200^\circ - A$, $200^\circ - B$.... et pour les angles $A\ B\ C$, $200^\circ - a$, ...

$$-\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c \text{....} \quad (3);$$

chacune de ces relations en fournit trois, en échangeant les lettres qui désignent les faces et les angles. On a, par exemple,

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

591. On en tire une autre relation importante; car, mettons dans (2) pour cos b sa valeur que donne cette dernière, et ensuite $1 - \sin^2 a$ pour $\cos^2 a$, il vient, en ôtant le facteur commun sin a,

$$\cos c \sin a = \sin c \cos a \cos B + \sin b \cos C;$$

or, les équations (1) donnent $\sin b = \frac{\sin B \cdot \sin c}{\sin C}$; comme $\cot c = \frac{\cos c}{\sin c}$, il vient, en divisant par sin c,

$$\cot c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot C \ldots\ldots (4)$$

Les équations 1, 2, 3 et 4 servent à résoudre tous les triangles sphériques; mais comme elles ont besoin de quelques modifications pour y appliquer le calcul logarithmique, il convient de développer les divers cas qu'on peut rencontrer.

2. *Triangles sphériques rectangles.*

592. Si l'angle C est droit, c.-à-d., si les faces a et b du tétraèdre sont perpendiculaires; nos quatre formules deviennent

(5) ... $\sin b = \sin c \sin B$ $\qquad$ $\cos c = \cos a \cos b$ ... (6)

(7) ... $\cos c = \cot A \cot B$ $\qquad$ $\cot c = \cot a \cos B$ ... (8)

Si, au contraire, B est droit, 3 et 4 donnent

$$\cos C = \sin A \cos c \ldots (9) \qquad \cot C = \cot c \sin a \ldots (10)$$

Ces équations, qui se prêtent aisément au calcul logarithmique, servent à résoudre tous les triangles rectangles : c'est pour cela qu'on y ramène les triangles obliquangles, en les décomposant en rectangles par des arcs perpendiculaires, ainsi que nous le verrons.

593. Comme les inconnues sont des arcs dont on ne détermine le nombre de degrés qu'à l'aide du sinus, cosinus ...., les solutions sont doubles. Pour distinguer celle qui convient au cas qu'on traite, on recourra aux expressions des autres lignes trigonométriques, et on aura égard à leurs signes.

On lève encore la difficulté en remarquant que les côtés les plus grands sont opposés aux angles les plus grands, et réciproquement. Cela se démontre comme pour les triangles rectilignes. Il sera de même aisé de voir que les triangles sphériques sont égaux, lorsqu'ils ont *trois côtés ou trois angles, ou deux côtés et un angle compris, ou enfin deux angles et un côté adjacens respectivement égaux.* On verra par là qu'il ne reste de solution double que quand on donne un côté et un angle opposé.

3. *Des Triangles obliquangles.*

7. 594. CAS I. *Étant données trois de ces choses, deux côtés* c, b, *et les angles opposés* C, B, *trouver la quatrième ?* Ce problème en comprend deux, suivant que l'inconnue est un angle ou un côté : l'équation (1) donne

$$\sin C = \frac{\sin c \times \sin B}{\sin b} \qquad \sin c = \frac{\sin C \times \sin b}{\sin B}.$$

595. CAS II. *Trouver l'un de ces quatre arcs, trois* 7.
côtés a, b, c, *et l'angle* C, *étant donnés les trois autres?* Ce problème en renferme trois.

1°. Trouver C? L'équation (2) donne

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

qu'il faut rendre propre au calcul des logarithmes. Or, on a $1 + \cos C$ et $1 - \cos C$ qui (358, I) équivalent à

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos c - \cos (a+b)}{\sin a \sin b},\ 2\sin^2 \tfrac{1}{2} \quad = \frac{\cos (a-b) - \cos c}{\sin a \sin b}$$

d'où $$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos (a-b) - \cos c}{\cos c - \cos (a+b)}$$

donc

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\left\{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \times \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \times \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}\right\}} \ldots (11)$$

d'après la note du n°. 360.

2°. Trouver le côté c opposé à l'angle donné C? soit déterminé un angle φ, tel que (*)

$$\operatorname{tang} \varphi = \cos C \operatorname{tang} b \ldots\ldots (12)$$

mettons pour $\cos C$ sa valeur dans 2, il viendra

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \cos b \operatorname{tang} \varphi$$
$$= \cos b \left(\frac{\cos a \cos \varphi + \sin a \sin \varphi}{\cos \varphi}\right)$$

(*) Remarquons que cette dernière équation revient à........... $\frac{1}{\operatorname{tang} \varphi} \times \cos C = \frac{1}{\operatorname{tang} b}$ ou $\cot \varphi \cos C = \cot b$, qui équivaut à la 8e. On voit donc que b est l'hypothénuse et φ un côté d'un triangle rectangle. Cette transformation revient donc à la division du triangle proposé en deux par un arc perpendiculaire au côté a, et mené par le sommet A.

ou $\cos c = \dfrac{\cos b \times \cos(a-\varphi)}{\cos\varphi}$ ..... (13)

3°. Trouver le côté a non opposé à l'angle donné? Cette dernière équation donne $a-\varphi$; et, comme la valeur de φ se tire de (12), on en conclut a.

7. 596. CAS III. *On donne trois de ces quatre choses ; deux côtés* a *et* c, *et deux angles* B *et* C (dont un opposé et l'autre adjacent), *trouver la quatrième.* Ce problème en renferme quatre.

1°. Trouver C? on déterminera un arc φ, par cette condition (*)

$$\cot c = \cot\varphi \cos B \text{.....} \quad (14)$$

et mettant cette valeur dans (4), il vient

$$\cot C = (\cot\varphi \sin a - \cos a) \cot B,$$

ou $\cot C = \dfrac{\cot B \times \sin(a-\varphi)}{\sin\varphi}$. ... (15)

2°. Trouver a? On connoîtra $a-\varphi$ par cette formule, et φ par la précédente. On en tirera a.

3°. Trouver c? On fera (**)

$$\cot C = \cos a \tang\varphi, \quad \text{....} \ (16)$$

et l'équation (4) deviendra

(*) Cela revient à la division du triangle en deux par un arc perpendiculaire abaissé du sommet A sur le côté a ; l'arc subsidiaire φ est le segment adjacent à l'angle B. *V.* formule (8).

(**) Il en est de même ici : car cette relation revient à $\cos a = \cot C \cot\varphi$, qui équivaut à (7). L'arc perpendiculaire est abaissé de l'angle B sur le côté opposé b; φ est l'angle du plan de cet arc avec l'hypothénuse a.

$$\cot c = \frac{\cot a \times \cos(B-\varphi)}{\cos \varphi} \ldots\ldots (17)$$

4°. Trouver B? Cette dernière formule donne $B-\varphi$; et comme on a φ par celle 16, on en tire B.

597. CAS IV. *Trouver l'une de ces quatre choses, les trois angles* A B C *et le côté* c, *les trois autres étant connues*. Il y a trois problèmes. 7.

1°. Trouver le côté c? Concevons que la formule (11) soit appliquée à la résolution du tétraèdre supplémentaire, en changeant a b c et C en a' b' c' et C'. Ensuite, pour revenir au triangle proposé, il faudra substituer pour a' b' c' et C' les valeurs $2D-A$, $2D-B$, $2D-C$, $2D-c$: il viendra

$$\cot \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\left\{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B) \times \cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C) \times \cos\frac{1}{2}(A+B-C)}\right\}} \ldots (18)$$

2°. Déterminer l'angle C opposé au côté donné? On appliquera de même les équations 12 et 13 au triangle supplémentaire; faisant ensuite $\varphi' = 100° - \varphi$, on trouve

$$\cot \varphi = \cos c \tang B,\ \cos C = \frac{\cos B \times \sin(A-\varphi)}{\sin \varphi}. \ldots (19)$$

3°. Trouver l'angle A? Ces dernières relations donneront φ et $A-\varphi$.

598. Nous ne nous arrêterons pas à faire des applications nombreuses de ces formules, qui ne peuvent offrir d'embarras : il faut seulement les rendre homogènes, en rétablissant les puissances du rayon (358). Nous nous contenterons des deux exemples suivans.

I. Etant données les longitudes et latitudes de deux villes, trouver leur distance? Soient C le pôle, et A B les deux villes : on aura les distances AC, BC au pôle, en retranchant les latitudes de 100°; la différence de 7.

leurs longitudes ou l'angle C est donné, et il s'agira de trouver l'arc c par le théorême 595,2°. Pour Paris et Toulon, par exemple, on a

$$b = 45°,7321,\quad a = 51°,90,\quad C = 4°,0648,$$

$L\cos C =$	$9,9991141$	$L\cos b =$	$9,8767300$
$L\,\text{tang}\, b =$	$9,9415735$	$L\cos(a-\varphi) =$	$9,9979146$
$L\,\text{tang}\,\varphi =$	$9,9406876$	$C^t.\ L\cos\varphi =$	$10,1228780$
d'où $\varphi =$	$45°,6663$	$L\cos c =$	$9,9975226$
$a-\varphi =$	$6°,2337$	$c =$	$6°,79$

Un degré du méridien vaut 100 kilomètres (53); ainsi la distance de Paris à Toulon est 679 kilom. (environ 175 lieues de 2000 toises).

10. II. Réduire un angle à l'horison? D'un point S pris hors d'un plan horisontal DMN, on a mesuré les angles $c\ a\ b$ que deux droites SM, SN forment entre elles, et avec la verticale SD; il s'agit d'en déduire l'angle MDN qui est la projection horisontale de MSN, c.-à-d. l'angle dièdre $MDSN = C$ que forment les faces $a\ b$, (271): la formule (11) donne la valeur de cet angle.

CHAPITRE II.

DES SURFACES ET DES COURBES A DOUBLE COURBURE.

1. *Système coordonné; Principes généraux.*

11. 599. POUR fixer la position d'un point M dans l'espace, on conçoit trois axes Ax, Ay, Az (que nous supposerons rectangulaires pour plus de simplicité), et les plans zAx, zAy, xAy qui passent par ces lignes : puis on donne

la distance PM, ou $z=c$, de ce point à sa projection P sur l'un de ces plans, ainsi que cette projection ; et par conséquent les coordonnées AN AS du point P, ou $x=a$, $y=b$. En achevant le parallélipipède QN (284), on verra que les données a, b et c ne sont autre chose que les distances MQ, MR, MP à ces trois plans. 11.

En considérant qu'outre l'angle trièdre $zAxy$, les trois plans coordonnés en forment sept autres, on verra bientôt que la position absolue du point M dans l'espace n'est fixée par les longueurs de $a\,b\,c$, qu'autant qu'on introduira les notions sur les signes (333). Ainsi au-dessous du plan xAy, conçu dans son étendue indéfinie, les z sont négatifs, si le point est à gauche du plan zAy, vers x', x est négatif ; y l'est en arrière du plan zAx.

Imaginons une équation entre les trois coordonnées 11.
x, y, z, telle que $f(x, y, z) = 0$; elle sera indéterminée. Prenons pour deux de ces variables des valeurs quelconques $x=a=AN$, $y=b=PN$; notre équation donnera pour z au moins une racine $z=c$. Si c est réel, on élevera en P la perpendiculaire $PM=c$ au plan yAx, et le point M de l'espace sera ainsi déterminé. Changeant de valeurs pour les arbitraires x et y, ou aura autant de points M ; et les unissant par la pensée, en établissant entre eux la continuité, on formera une surface, telle qu'un cône, un cylindre, une sphère... $f(x, y, z) = 0$ sera l'*équation de la surface*, parce qu'elle en distingue les divers points de tous ceux de l'espace. Si z a plusieurs racines réelles, la surface aura plusieurs nappes, et si z est imaginaire, la perpendiculaire indéfinie élevée en P au plan xy ne rencontrera pas la surface.

Si après avoir pris une valeur fixe de y, telle que $y=b=AS$, on fait varier x, l'ordonnée $QS=z$ se

à 1. mouvra suivant SP parallèle au plan xz, et les variations correspondantes qu'elle éprouvera seront déterminées par $f(x, b, z) = 0$, qui est par conséquent l'équation de l'intersection de la surface par le plan SM. On verra de même qu'en faisant $x = a$ ou $z = c$, on a les intersections de la surface par des plans MN ou QR parallèles aux yz ou aux xy.

600. Bientôt nous nous occuperons de la recherche de l'équation de toute surface dont la génération est connue; mais il en est dont l'équation s'obtient sur-le-champ. C'est ainsi que $z = 0$ est visiblement celle du plan xy, $z = c$ celle d'un plan qui lui est parallèle, et en est distant de la quantité c; $x = 0$, $x = a$ sont les équations du plan yz, et de celui qui lui est parallèle et en est distant de a, etc.

11. 601. Le triangle rectangle AMP donne $z^2 + AP^2 = AM^2$, et comme on tire de APN, $AP^2 = x^2 + y^2$, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

en faisant $AM = R$. Donc, 1°. la distance d'un point à l'origine est la racine des carrés des trois coordonnées de ce point. 2°. Si x, y et z sont variables, cette équation caractérisera tous les points de l'espace dont la distance à l'origine est la même et $= R$: c'est donc l'*équation de la sphère* qui a R pour rayon et le centre à l'origine.

12. Soient deux points, l'un $N(x, y, z)$, l'autre $M(x', y', z')$; n et m leurs projections sur le plan xy, mn est celle de la ligne $MN = R$. Or (373) on a $mn^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$. De plus, MP parallèle à mn forme le triangle MNP rectangle en P, d'où $MN^2 = mn^2 + PN^2$; et comme $PN = Nn - Mm = z - z'$, on a

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = R^2,$$

R est la distance entre les points (xyz), $(x'y'z')$ (*); 12.
et si on regarde x, y, z comme des variables, *cette équation est celle d'une sphère de rayon R*, et dont le centre est situé au point $(x'y'z')$.

602. Concevons une surface cylindrique droite à base quelconque (286) donnée sur le plan xy par son équation $f(x, y) = 0$. En attribuant à x et y des valeurs qui satisfassent à cette équation, le point du plan xy que ces coordonnées déterminent, est un point de la courbe qui sert de base au cylindre ; la perpendiculaire indéfinie élevée en ce point est une génératrice de ce corps ; ainsi quelque valeur qu'on attribue à z, l'extrémité de cette perpendiculaire sera sur la surface du cylindre, dont on déterminera les divers points en prenant pour z et x toutes les valeurs possibles, et pour y celles que donne l'équation $f(x, y) = 0$. Donc *l'équation de la surface d'un cylindre droit est celle de sa base*, ou $f(x, y) = 0$.

Si la génératrice du cylindre droit est perpendiculaire au plan des xz, l'équation de cette surface est celle de la base tracée sur ce plan, etc.

Le même raisonnement prouve que l'équation d'un plan perpendiculaire à l'un des plans coordonnés est celle de sa *Trace* sur celui-ci, c.-à-d., de la ligne d'intersection de ces deux plans. Soit donc $AB = a$, $a =$ tang CBI, 13.

(*) Comme mB, nC parallèles à Ay donnent $BC = x - x' =$ 12.
la projection de MN sur l'axe des x, on voit que *la longueur d'une ligne dans l'espace est la racine carrée de la somme des carrés de ses projections sur les trois axes*.

On a aussi $MN = \dfrac{PM}{\cos NMP}$; une ligne dans l'espace est le quotient de sa projection sur un plan quelconque, divisée par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec ce plan. Ces théorèmes s'étendent aussi aux aires planes situées dans l'espace. V. n°. 699.

13. $x = az + \alpha$ qui est l'équation de la ligne BC, est aussi celle du plan FBC perpendiculaire à zAx et mené suivant BC.

603. Soient $M = o$, $N = o$, les équations de deux surfaces quelconques; chacune distingue en particulier ceux des points de l'espace qui appartiennent à ces surfaces; ainsi leur existence simultanée appartient à la ligne suivant laquelle ces surfaces se coupent. Donc *un point a trois équations; une surface n'en a qu'une seule; une courbe en a deux, qui sont celles des surfaces qui par leur intersection déterminent cette ligne.* Comme il y a une infinité de surfaces qui passent par une ligne donnée, on sent qu'une même courbe a une infinité d'équations.

Si on élimine z entre $M = o$, $N = o$, on trouvera une équation $P = o$ en x et y; ce sera celle d'un cylindre droit, qui coupe aussi nos deux surfaces suivant la courbe dont il s'agit, et l'équation de la projection (272) de cette courbe sur le plan xy. De même, en éliminant y, on aura l'équation $Q = o$ de la projection sur le plan xz ou du cylindre projetant. En substituant ces cylindres aux surfaces données, $P = o$, $Q = o$, seront les équations de notre courbe : donc *on peut prendre pour équations d'une courbe, celles de ses projections sur deux plans coordonnés.*

604. Appliquons ces principes à la ligne droite. Nous prendrons pour ses équations celles de deux plans quelconques qui la contiennent; mais il sera convenable de préférer ceux qui fournissent des résultats plus simples. L'axe des z a pour équations $x = o$, $y = o$, qui sont celles des plans yz et xz. De même $x = \alpha$, $y = \beta$, sont les équations d'une droite parallèle aux z, et dont le pied sur le plan xy a pour coordonnées $x = \alpha$, $y = \beta$.

On raisonnera de même pour les autres axes ; $x = 0$, $z = 0$ sont les équations de celui des y, etc...

Soit une droite quelconque EF ; conduisant un plan FBC perpendiculaire à xz, BC en sera la projection sur ce plan (272) : de même HG sera celle sur le plan yz ; les équations de ces projections, ou des plans projetans, seront celles de la droite EF, ou 13.

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta.$$

Il sera aisé de voir que α et β sont les coordonnées AB AG du point E où la droite rencontre le plan xy ; et que a et b sont les tangentes des angles que BC HG font avec l'axe Az. En éliminant z, on obtient l'équation de la projection sur le plan xy,

$$ay = bx + a\beta - b\alpha.$$

605. Si la droite passe par un point donné $(x'y'z')$, les projections de ce point sont situées sur celles de la droite, donc les équations sont alors (369)

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

On trouvera aisément les valeurs de a et b lorsque la droite doit passer par un second point, $(x''y''z'')$.

Quand la droite passe par l'origine, ses équations sont $x = az$, $y = bz$.

Il est aisé de voir que deux droites parallèles ont leurs projections parallèles sur le même plan (268) : donc les équations de ces lignes doivent avoir pour z les mêmes coefficiens a et b, et différer seulement par les valeurs des constantes α et β.

2. *Équations du Plan, du Cylindre, du Cône, etc.*

606. Quelles que soient les conditions qui déterminent la nature d'une surface, elles se réduisent toujours, en

dernière analyse, à donner la loi de sa génération, qui consiste en ce qu'une courbe *Génératrice*, variable ou constante de forme, glisse le long d'une ou plusieurs lignes données qu'on nomme *Directrices*. L'équation de la surface engendrée s'obtient en raisonnant ici, comme au n°. 460; nous allons en donner divers exemples en commençant par le plan.

14. Un plan est engendré par une droite qui glisse sur deux autres qui se croisent : les traces BC BD sur les plans xz yz se rencontrent en B, et ont pour équations, savoir,

$$BC\ldots\ y=0,\quad z=Ax+C$$
$$BD\ldots\ x=0,\quad z=By+C\ldots\quad (1).$$

En faisant $AB=C$. Or, si la trace BC glisse parallèlement le long de BD, elle engendrera le même plan; c'est ce qu'il s'agit d'exprimer en analyse.

Soit EF une parallèle quelconque à BC dans l'espace; le plan projetant $EHIF$ sera parallèle à zx, HI le sera à Ax. La projection de EF sur le plan zx le sera à BC, en sorte que les équations de EF seront

$$y=\alpha\quad z=Ax+\beta\ldots\quad (2).$$

Supposons que cette ligne coupe la directrice DB; pour avoir le lieu de l'intersection, éliminons x y et z entre les quatre équations 1 et 2, il viendra l'équation de *condition*

$$\beta=B\alpha+C\ldots\quad (3),$$

qui exprimera que les lignes BD EF se coupent. Si donc on donne à α et β des valeurs qui y satisfassent, on sera sûr que les équations (2) seront celles de la génératrice dans une de ses positions. Concevons donc qu'on mette dans (2) pour β sa valeur $B\alpha+C$, ces équations seront celles d'une génératrice quelconque, dont la position dépendra

de la valeur qu'on attribuera à l'arbitraire α. On en conclut que si on élimine α entre elles, c.-à-d., α et β entre les trois équations 2 et 3, l'équation résultante

$$z = Ax + By + C$$

sera celle du plan, puisque xy et z représentent les coordonnées des divers points d'une génératrice quelconque.

C est le z à l'origine, ou AB; A et B sont les tangentes des angles que font avec les axes des x et y les traces BC BD du plan sur ceux des xz et des yz. 14.

Si on fait varier C seul, le plan se meut parallèlement, parce que ses traces demeurent parallèles (268).

Donc, 1°. toute équation du premier degré est celle d'un plan, puisqu'on peut la ramener à cette forme, (*Voy.* n°. 368).

2°. Deux équations quelconques du 1er. degré sont celles d'une ligne droite.

3°. Lorsque l'équation d'un plan est donnée, on obtient celles des traces sur les plans des xz, yz et xy, en faisant $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, qui sont les équations de ces plans. Ainsi, $Ax + By + C = 0$ est l'équation de la trace du plan ci-dessus sur celui des xy.

4°. On auroit pu prendre une droite quelconque dans l'espace pour génératrice, et la faire glisser sur les traces; ce calcul plus compliqué, auquel on pourra s'exercer, conduiroit au même résultat.

607. Le même raisonnement sert à trouver l'équation du *Cylindre*. Soient

$$M = 0 \quad N = 0 \ldots . \quad (1).$$

Les équations d'une courbe quelconque donnée dans l'espace, et sur laquelle doit glisser la droite génératrice en restant parallèle à elle-même (286).

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

seront les équations d'une parallèle à la génératrice, a et b étant donnés; α et β dépendent de la position de cette droite. Or, pour qu'elle coupe la directrice, il faut que ces quatre équations puissent co-exister; c.-à-d. que α et β doivent être tels, que l'équation $\beta = F\alpha$, qui résulte de l'élimination de $x\,y$ et z entre elles, soit satisfaite. Si on met dans (2), $F\alpha$ pour β, ces deux équations seront donc celles d'une génératrice quelconque, dont la position dépendra de la valeur de α; et si on élimine ensuite α entre elles, on aura une relation entre $x\,y$ et z, qui aura lieu pour une génératrice quelconque; ce sera par conséquent l'équation cherchée.

Concluons de là que pour trouver l'équation d'une surface cylindrique, il faut éliminer $x\,y$ et z entre 1 et 2; puis, dans l'équation de condition $\beta = F\alpha$ qui en résulte, mettre $x - az$ pour α et $y - bz$ pour β : l'équation du cylindre est donc de la forme $y - bz = F(x - az)$, la forme (*) de la fonction F dépendant de la nature de la directrice. (*Voy.* n°. 696).

Si par exemple la base est un cercle de rayon r, tracé dans le plan xy, le centre étant à l'origine; les rela-

---

(*) Les signes $Fx, fx, \varphi x, \ldots\ldots$ servent à désigner des fonctions différentes de x; ils indiquent des formules dans lesquelles la même quantité x entre, mais combinée de diverses manières avec les données. Au contraire fx, fz sont la même fonction de deux quantités différentes x et z : en sorte que si on changeoit z en x dans celle-ci, on reproduiroit identiquement l'autre. $f(\sqrt{z} + a)$, $f\left(\frac{a}{b + \log z}\right)$ désignent que si on faisoit $\sqrt{z} + a = x$, et $\frac{a}{b + \log z} = x$, ces fonctions deviendroient identiques et $= fx$.

tions (1) seront $x^2+y^2=r^2$, $z=0$; éliminant x, y et z, on aura $\alpha^2+\beta^3=r^2$ pour l'équation de condition (*), d'où

$$(x-az)^2+(y-bz)^2=r^2$$

pour l'équation cherchée. Si la génératrice est parallèle au plan xz, a est nul, et on a

$$x^2+y^2-2byz+b^2z^2=r^2.$$

608. Soient $M=0,\ N=0\ldots\ (1)$

les équations de la directrice quelconque d'une surface *Conique* (288). Les coordonnées du sommet étant $a\ b\ c$, toute droite qui passe par ce point, a pour équations (605)

$$x-a=\alpha(z-c),\quad y-b=\beta(z-c).$$

Si cette droite rencontre la courbe, elle sera une génératrice : éliminons donc $x\,y$ et z entre ces quatre équations, et dans la relation résultante entre α et β, $\beta=F\alpha$, remettons $\frac{x-a}{z-c}$ et $\frac{y-b}{z-c}$ pour ces quantités, nous aurons l'équation du cône ; la forme de cette équation sera donc $\frac{y-b}{z-c}=F\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$.

Si, par exemple, la base est un cercle, comme ci-dessus, les équations (1) deviennent $x^2+y^2=r^2$, $z=0$; et l'équation entre α et β est $(a-\alpha c)^2+(b-\beta c)^2=r^2$, puis mettant enfin $\frac{x-a}{z-c}$ et $\frac{y-b}{z-c}$ pour α et β, l'*équation*

(*) Cette équation est visible d'elle-même, puisque α et β sont les coordonnées du pied de la génératrice. Même remarque pour le cône.

On pourroit trouver de même l'équation du plan, en le considérant comme un cylindre dont la base est une droite.

du *cône à base circulaire*, est

$$\{a(z-c)-c(x-a)\}^2+\{b(z-c)-c(y-b)\}^2=r^2(z-c)^2.$$

Pour le *cône droit à base circulaire*, a et b sont nuls, et on trouve $\quad x^2+y^2=m^2(z-c)^2,$

en nommant m la tangente de l'angle formé par l'axe et la génératrice, ou $mc=r$.

Si le cercle de la base n'étoit pas tracé dans le plan xy, il faudroit remplacer les équations (1) par $z=Ax$ et $x^2+y^2+z=r^2$, qui sont les équations de la base, qu'on suppose perpendiculaire aux xz; A est la tangente de l'angle qu'elle fait avec le plan xy.

15. 609. On peut concevoir toute *surface de Révolution*, comme engendrée (291) par le mouvement d'un cercle BDC dont le plan est perpendiculaire à un axe Az, le centre I étant sur cet axe, et dont le rayon IC est tel que ce cercle coupe toujours une courbe quelconque donnée CAB. Nous ne traiterons d'abord que le cas où l'axe est pris pour celui des z. Tout cercle BDC dont le plan est parallèle aux xy, a pour équations celles de son plan et de son cylindre projetant, ou

$$z=\alpha \text{ et } x^2+y^2=\beta^2 \ldots \quad (1);$$

en faisant $AI=\alpha$, et le rayon $IC=\beta$. Les équations de la directrice donnée CAB étant

$$M=0,\ N=0 \ldots \quad (2),$$

pour que ces courbes se rencontrent, il faut qu'en éliminant xy et z entre ces quatre équations, la relation $\beta=F\alpha$, à laquelle on parviendra, soit satisfaite. Si on met $F\alpha$ pour β dans (1), ces équations seront alors celles du cercle générateur dans une de ses positions dépendante de α; et si on élimine ensuite β, on aura l'équation demandée, qui aura la forme $z=F(x^2+y^2)$.

I. Soit d'abord pris pour directrice un cercle dans le plan xz et dont le centre soit à l'origine ; les relations (2) seront alors $y = 0$, $x^2 + z^2 = r^2$; l'équation de condition sera $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, ce qui est d'ailleurs évident par soi-même ; donc, remettant $x^2 + y^2$ pour β^2 et α pour z, on a $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pour l'équation de la sphère.

II. Traçons dans le plan xz une parabole située comme 15.
on le voit figure 15 ; ses équations seront $y = 0$, $x^2 = 2pz$; $\beta^2 = 2p\alpha$ sera l'équation de condition, et

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

sera celle du *Paraboloïde de révolution*.

III. On trouvera de même pour l'*Ellipsoïde* et l'*Hyperboloïde de révolution*, dont le premier axe A se confond avec celui des z,

$$A^2(x^2 + y^2) \pm B^2 z^2 = \pm A^2 B^2,$$

le signe supérieur a lieu pour l'ellipsoïde.

IV. Supposons qu'une droite quelconque tourne autour de l'axe des z ; cherchons la nature de la surface qu'elle engendre. Les équations de la directrice sont

$$x = az + A \quad y = bz + B$$

d'où $$(a\alpha + A)^2 + (b\alpha + B)^2 = \beta^2$$

pour équation de condition. Celle de la surface est donc $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)z^2 + 2(Aa + Bb)z + A^2 + B^2$. En faisant $x = 0$, on trouve (439) que l'intersection par le plan yz est une hyperbole ; ainsi la surface engendrée est un hyperboloïde de révolution.

Cependant si la droite génératrice coupe l'axe des z, ses deux équations doivent être satisfaites en faisant $x = 0$, $y = 0$ et $z = c$, d'où $A = -ac$, $B = -bc$: donc on a

$$(a^2+b^2)(z-c)^2=x^2+y^2$$

qui appartient à un cône droit (608).

Pour trouver l'équation d'une surface de révolution dont l'axe a une situation quelconque, il faut ou recourir à une transformation de coordonnées (622), ou traiter directement le problême d'une manière analogue à la précédente. (*Voy.* n°. 615).

3. *Problêmes sur le Plan et la Ligne droite.*

610. Remarquons, comme au n°. 375, qu'on peut se proposer deux genres de problêmes sur les surfaces. Tantôt il s'agit de déterminer les points qui jouissent de certaines propriétés; tantôt de donner à la surface une position ou des dimensions, telles qu'elle remplisse des conditions demandées. Dans le 1er. cas x y z sont les inconnues; dans le 2e. il faut déterminer quelques constantes de l'équation d'une manière convenable. Les conditions données doivent dans tous les cas conduire à autant d'équations que d'inconnues, sans quoi le problême seroit indéterminé ou absurde. Nous allons appliquer ces considérations générales au plan.

Trouver les projections de l'intersection de deux plans donnés par leurs équations.

$$z=Ax+By+C \quad z=A'x+B'y+C',$$

en éliminant z, on a la projection sur le plan xy,

$$(A-A')x+(B-B')y+C-C'=0$$

de même $(A'-A)z+(AB'-A'B)y+AC'-A'C=0$

$$(B'-B)z+(A'B-AB')x+BC'-B'C=0$$

pour les projections sur les plans des yz et des xz.

611. *Faire passer un plan par un, deux ou trois points donnés.* L'équation de ce plan étant

$$z = Ax + By + C,$$

pour qu'il passe par le point $(x'y'z')$, il faut que..... $z' = Ax' + By' + C$; et retranchant, on a

$$z - z' = A(x - x') + B(y - y')$$

pour l'équation du plan qui passe par le point $(x'y'z')$. Le problème resteroit indéterminé, si les constantes A et B n'étoient pas données, à moins qu'elles ne fussent liées par deux conditions dont il faudroit les déduire. Si par exemple le plan doit être parallèle à un autre, $z = A'x + B'y + C'$, on aura $A = A'$, $B = B'$.

On peut demander aussi que le plan passe par un 2e. point $(x''y''z'')$, et on auroit $z'' = Ax'' + By'' + C$; ce qui laisseroit une constante arbitraire, et permettroit de faire passer le plan par un 3e. point.

612. *Trouver les conditions pour qu'une droite et un plan coïncident, ou soient parallèles.* Soient les équations du plan et de la droite

$$z = Ax + By + C$$
$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

en substituant $az + \alpha$ et $bz + \beta$ pour x et y dans la 1re., on a $z(Aa + Bb - 1) + A\alpha + B\beta + C = 0$. Si la droite et le plan n'avoient qu'un point de commun, on en trouveroit ainsi les coordonnées; mais pour qu'elle y soit entièrement située, il faut satisfaire à cette équation quel que soit z; d'où (557)

$$Aa + Bb = 1, \quad A\alpha + B\beta + C = 0;$$

ce sont les équations de condition cherchées.

Si la droite est simplement parallèle au plan, il faut qu'en les transportant parallèlement jusqu'à l'origine, la droite et le plan coïncident; ainsi ces équations doivent être satisfaites en y supposant α β et C nuls : d'où

$$Aa + Bb - 1 = 0.$$

613. *Trouver le point d'intersection de deux droites.* Soient leurs équations données

$$1^{re} \ldots\ldots \; x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$
$$2^{e} \ldots\ldots \; x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta'$$

Pour le point cherché, x y et z satisfont à ces équations : éliminant, on trouve l'équation de condition

$$(\alpha - \alpha')(b - b') = (\beta - \beta')(a - a').$$

Si elle n'est pas satisfaite, les lignes ne se coupent pas; et si elle l'est, le point d'intersection a pour coordonnées

$$z = \frac{\alpha - \alpha'}{a' - a} = \frac{\beta - \beta'}{b' - b}, \quad x = \frac{a'\alpha - a\alpha'}{a' - a}, \quad y = \frac{b'\beta - b\beta'}{b' - b}.$$

614. *Exprimer qu'une droite est perpendiculaire à un plan.* Le plan projetant la droite sur les xy est à la fois perpendiculaire au plan donné, et à celui des xy : il coupe donc ces plans suivant des lignes perpendiculaires à leur commune section (266) : or, l'une de ces lignes est la projection de la droite donnée, l'autre est la trace du plan sur celui des xy; donc ces lignes sont perpendiculaires, ou plutôt, *lorsqu'une ligne est perpendiculaire sur un plan, les traces de ce plan et les projections de la ligne sont à angle droit.* D'après cela soient

$$z = Ax + By + C$$
$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

les équations du plan et de la droite; celles des traces

du plan sur les xz et yz sont

$$z = Ax + C, \quad z = By + C,$$

ou $$x = \frac{1}{A}z - \frac{C}{A}, \quad y = \frac{1}{B}z - \frac{C}{B}:$$

la relation connue (370) donne

$$A + a = 0, \quad B + b = 0,$$

ce sont les équations de condition demandées, qui serviront à déterminer deux des constantes du plan ou de la droite, de manière que celle-ci soit perpendiculaire au plan. Les autres constantes devront être données, ou assujéties à d'autres conditions.

Si, par exemple, on veut mener un plan perpendiculaire à la droite donnée, l'équation de ce plan sera

$$z + ax + by = C.$$

615. Les coordonnées du pied de la droite sur le plan xy sont α et β; la sphère dont le centre est en ce point a pour équation (601),

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = r^2.$$

Ces deux dernières équations appartiennent donc à un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite donnée ; le rayon de ce cercle et sa situation absolue dépendent de r et de C.

Soient $M = 0$, $N = 0$ les équations d'une courbe ; pour qu'elle coupe notre cercle, il faut que ces quatre équations puissent coexister : en éliminant $x y$ et z, on a l'équation de condition $r = F(C)$, et remettant

$z + ax + by$ pour C, et $\sqrt{\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2\}}$

pour r, on aura l'équation de la surface engendrée par

fait avec les axes des x, y et z, il faut donner à la 2e. ligne tour-à-tour la situation de chacun de ces axes, puis mettre ici les valeurs de a' et b' correspondantes. Par exemple, celles que ces quantités doivent prendre pour que $x = a'z$, $y = b'z$ deviennent $y = 0$, $z = 0$, qui sont les équations de l'axe des x, sont $b' = 0$ et $a' = \infty$. Si on introduit ces valeurs dans notre formule (*), on

---

(*) Soit la fraction $\frac{Ax^a + Bx^b + \ldots}{Mx^m + Nx^n + \ldots}$, qu'on peut écrire ainsi $\frac{x^a(A + Bx^{b-a} + \ldots.}{x^m(M + Nx^{n-m} + \ldots.}$, en supposant que a et m sont les moindres exposans de x dans les deux termes. Il se présente trois cas. 1°. Si $m = a$, la fraction devient $\frac{A + Bx^{b-a} + \ldots.}{M + Nx^{n-m} + \ldots.}$: plus x décroît et plus la fraction approche de $\frac{A}{M}$, qui est la limite répondant à $x = 0$. 2°. si $m > a$, on a $\frac{A + Bx^{b-a} + \ldots.}{x^{m-a}(M + Nx^{n-m} \ldots)}$, dont l'infini est visiblement la limite, ce qui revient à dire que la fraction croît sans bornes. 3°. Enfin si $m < a$, la limite est zéro. Cette manière de prendre la limite est ce qu'on nomme *faire* x *infiniment petit*.

Si les exposans a et m sont au contraire les plus élevés dans les deux termes, on les mettra sous la forme $x^a\left(A + \frac{B}{x^{a-b}} + \ldots.\right)$, $x^m\left(M + \frac{N}{x^{m-n}} \ldots.\right)$. Or plus x croît, et plus les termes $\frac{B}{x^{a-b}}$, $\frac{N}{x^{m-n}}$,.... approchent de zéro, qui répond à x infini; en sorte que si $a = m$, la limite est $\frac{A}{M}$; si $a > m$ la fraction devient $\frac{x^{a-m}(A + \ldots.)}{M + \ldots.}$ qui devient infinie avec x : enfin si $a < m$, la limite est zéro. On appelle cette opération *faire* x *infiniment grand*.

Il est facile de voir que ce raisonnement ne porte que sur le 1er.

exprimera que la 2e. droite se couche sur l'axe des x, et on aura $\cos X = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}$.

En faisant de même $a'=0$, $b'=\infty$, les équations $x=a'z$, $y=b'z$ de la 2e. droite deviennent $x=0$, $z=0$, qui sont celles de l'axe des y : on trouve donc $\cos Y$. Enfin $a'=0$, $b'=0$, donnent $\cos Z$. Donc les cosinus des angles qu'une droite fait avec les axes sont

$$\cos X = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},\ \cos Y = \frac{b}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},\ \cos Z = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}$$

2°. Ces valeurs sont aussi celles des sinus des angles que la droite fait avec les plans des yz, xz et xy, puisque ces angles sont visiblement les complémens de X, Y et Z.

3°. Ajoutons les carrés de ces cosinus, il vient

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

Cette relation exprime qu'on peut mener une droite dans l'espace de manière à former avec les axes des x et des y des angles donnés X et Y; mais que Z est déterminé. C'est ce qui d'ailleurs est visible.

---

terme du numérateur et du dénominateur, en sorte qu'on auroit pu d'abord réduire la fraction à $\frac{Ax^n}{Mx^n}$. Il en seroit de même de toute autre fonction, ce qu'on démontreroit par un raisonnement analogue. Concluons donc que *pour faire x infini dans une fonction, il faut n'y conserver que les termes où cette lettre porte les exposans les plus élevés : au contraire, pour faire x infiniment petit, il faut supprimer tous les termes, excepté ceux qui ont les puissances moindres de x.* C'est ainsi que quand $x=\infty$, $\frac{a+\sqrt[3]{(x^3+bx^2+c)}}{m+\sqrt{(x^2+n)}}$ se réduit à $\frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{x^2}}$ ou 1.

4°. Si on met les valeurs de $\cos X$, etc., dans $\cos A$; et de même si pour la 2e. droite on met $\cos X'$ pour $\frac{a'}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}$; etc., on aura

$$\cos A = \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z';$$

l'angle des deux droites est exprimé en fonction des angles que chacune d'elles fait avec les trois axes.

5°. Si les deux lignes sont perpendiculaires, $\cos A = 0$, et on a pour l'équation qui exprime cette condition

$$1 + aa' + bb' = 0,$$

ou $$\cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' = 0.$$

619. *Trouver l'angle* θ *de deux plans.* Soient

$$z = Ax + By + C, \quad z = A'x + B'y + C',$$

les équations données : si de l'origine on abaisse des perpendiculaires sur ces plans, l'angle de ces lignes sera égal à celui des plans. Soient donc $x = az$, $y = bz$ les équations d'une droite menée par l'origine; pour qu'elle soit perpendiculaire au 1er. plan, il faut qu'on ait (614), $A + a = 0$, $B + b = 0$. On en conclura aisément que les équations des perpendiculaires sont

1. $x + Az = 0$, $y + Bz = 0$... 2. $x + A'z = 0$, $y + B'z = 0$.

Donc on a pour le cosinus de l'angle de ces droites, et par conséquent pour celui des plans

$$\cos \theta = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)}\sqrt{(1 + A'^2 + B'^2)}}.$$

1°. Si on fait prendre au 2e. plan la situation de celui des xz, $y = 0$ sera son équation; il faut donc faire $A' = C' = 0$ et $B' = \infty$, pour avoir l'angle T

qu'un plan fait avec celui des xz. On a de même les angles U et V qu'il fait avec les yz et xy. Donc

$$\cos T = \frac{B}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}},\ \cos U = \frac{A}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}},\ \cos V = \frac{1}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}}$$

d'où $$\cos^2 T + \cos^2 U + \cos^2 V = 1,$$

et $$\cos \theta = \cos T \cos T' + \cos U \cos U' + \cos V \cos V',$$

pour le cosinus de l'angle de deux plans en fonction de ceux qu'ils forment respectivement avec les plans coordonnés.

2°. Si les plans sont à angle droit

$$1 + AA' + BB' = 0,$$

ou $$\cos T \cos T' + \cos U \cos U' + \cos V \cos V' = 0.$$

620. *Trouver l'angle η d'une droite et d'un plan*. Soient

$$z = Ax + By + C \text{ et } x = az + \alpha,\ y = bz + \beta,$$

leurs équations. L'angle cherché est celui que la droite fait avec sa projection sur le plan (272) : si on abaisse d'un point de la droite une perpendiculaire sur ce plan, l'angle de ces deux lignes sera donc complément de η : il s'agit d'exécuter cette opération analytiquement. De l'origine menons une droite quelconque ; ses équations seront $x = a'z$, $y = b'z$; pour qu'elle soit perpendiculaire au plan, il faut (614) qu'on ait $a' = -A$, $b' = -B$. L'angle qu'elle forme avec la ligne donnée a pour cosinus la valeur du n°. 618 ; donc

$$\sin \eta = \frac{1 - Aa - Bb}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}\sqrt{(1 + A^2 + B^2)}}.$$

Il sera aisé d'en conclure que les angles que la droite fait avec les plans coordonnés des xz, yz et xy ont pour

sinus respectifs

$$\frac{b}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},\quad \frac{a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},\quad \frac{1}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}\,;$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu (618, 1°.).

4. *Transformation des Coordonnées.*

621. Pour transporter l'origine au point ($\alpha\,\beta\,\gamma$), sans changer la direction des axes, qu'on suppose d'ailleurs quelconque, par un raisonnement semblable à celui du n°. 382, on verra qu'il faut faire

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma.$$

Les axes primitifs x, y, z sont parallèles aux nouveaux x', y', z' ; on doit d'ailleurs attribuer aux coordonnées α, β, γ de la nouvelle origine les signes qui dépendent de sa position (599). Si elle est située sur le plan xy, $\gamma = 0$; si elle est sur l'axe des z, α et β sont nuls, etc.

16. 622. Pour changer la direction des axes qu'on suppose rectangulaires, en conservant la même origine, imaginons trois nouveaux axes Ax', Ay', Az', et un point quelconque (compris dans l'angle trièdre qu'ils forment) ; puis menons les coordonnées x', y', z' de ce point, et projetons-les sur l'axe des x ; l'abscisse x sera, comme n°. 383, la somme de ces projections. Désignons par (xx') l'angle $x'Ax$ formé par les axes des x et x', par ($y'y$) l'angle $y'Ay$, etc., nous aurons

$$x = x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x) + z'\cos(z'x)$$

projetant aussi les coordonnées x', y' et z' sur l'axe des y et sur celui des z, nous trouverons

$$\left.\begin{aligned} y &= x'\cos(x'y) + y'\cos(y'y) + z'\cos(z'y) \\ z &= x'\cos(x'z) + y'\cos(y'z) + z'\cos(z'z) \end{aligned}\right\} \quad (A).$$

Telles sont les relations qui servent à changer la direction des axes. On remarquera que, 1°. comme $(x'x)$ 16.
$(x'y)$ $(x'z)$ sont les angles que forme la droite Ax' avec les axes rectangulaires des $x\ y\ z$, on a (618,3°.)

$$\cos^2(x'x)+\cos^2(x'y)+\cos^2(x'z)=1$$

de même

$$\cos^2(y'x)+\cos^2(y'y)+\cos^2(y'z)=1$$

$$\cos^2(z'x)+\cos^2(z'y)+\cos^2(z'z)=1$$

2°. Les angles que les nouveaux axes forment entre eux donnent (618,4°.)

$$\cos(x'y')=\cos(x'x)\cos(y'x)+\cos(x'y)\cos(y'y)+\cos(x'z)\cos(y'z)$$

$$\cos(x'z')=\cos(x'x)\cos(z'x)+\cos(x'y)\cos(z'y)+\cos(x'z)\cos(z'z)$$

$$\cos(y'z')=\cos(y'x)\cos(z'x)+\cos(y'y)\cos(z'y)+\cos(y'z)\cos(z'z)$$

si les nouvelles coordonnées sont rectangles, les seconds membres de ces trois équations sont $=0$; ce sont les relations qui expriment cette condition.

623. On peut déterminer la position des nouveaux 16.
axes, sans donner les angles qu'ils forment entre eux et avec les $x\ y\ z$: en voici un exemple tiré de la Mécanique céleste, tom. Ier., pag. 73. Les lignes $Az\ Az'\ Ax'\ Ay'$, sont dans l'espace et vues en perspective ; $BC\ Ax$ et Ay sont dans le plan xy : les coordonnées $x'y'z'$ sont supposées rectangles, ainsi que $x\ y$ et z.

Le plan des axes $Ax'\ Ay'$ fait avec celui des xy l'angle θ; BC est l'intersection de ces plans, fixée par l'angle ψ qu'elle fait avec Ax : de plus, la position de l'axe Ax' l'est par l'angle $x'AC=\varphi$ qu'il fait avec la trace BC. Il s'agit d'exprimer les angles $(x'x)$ $(x'y)$... en fonction θ, ψ et φ, qui déterm[illegible]blement la situation des nouveaux axes. Pour ce[illegible] que les droites $Ax\ Ax'\ AC$ forment un [illegible] on connoît

deux angles plans φ et ψ, ainsi que l'angle dièdre compris θ. Appliquons ici la formule (2) de la Trigonométrie sphérique (590); faisons $c = (x'x)$, $C = \theta$, $a = \psi$ et $b = \varphi$: nous aurons

$$\cos(x'x) = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\cos\theta.$$

Il est clair que pour l'angle xAy', il suffit de changer ici φ en $100^\circ + \varphi$: de même, on mettra $100^\circ + \psi$ pour ψ, et on aura yAx' ; enfin, en faisant cette double substitution, on aura yAy', ce qui donnera

$$\cos(y'x) = -\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\theta$$
$$\cos(x'y) = -\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta$$
$$\cos(y'y) = \sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta.$$

Considérons l'angle trièdre $z'ACx$; l'axe Az' fait avec AC un angle droit (266), et avec le plan xAy l'angle $100^\circ - \theta$, en supposant ce plan situé au-dessus de celui des $x'y'$. Faisons donc dans la formule 2, n°. 590, $c = (z'x)$, $C = 100^\circ - \theta$, $a = 100^\circ$, $b = \psi$; nous aurons

$$\cos(z'x) = \sin\psi\sin\theta$$

d'où......... $\cos(z'y) = \cos\psi\sin\theta$,

en augmentant ψ de 100°. Enfin, l'angle zAC étant aussi droit, et l'angle dièdre $zACx' = 100^\circ + \theta$, la pyramide $zACx'$ donne

$$\cos(x'z) = -\sin\varphi\sin\theta$$

d'où. . . . . . $\cos(y'z) = -\cos\varphi\sin\theta$

enfin . . . . . $\cos(z'z) = \cos\theta$,

on a ainsi les valeurs des neuf coefficiens des équations A.

Les conditions 1°. et 2°. n°. 622, sont remplies d'elles-mêmes par ces valeurs, ainsi qu'on peut s'en assurer.

5. *Des Intersections planes.*

624. Lorsque l'intersection de deux surfaces est une courbe plane, il est plus commode, pour en connoître les propriétés, de la rapporter à des coordonnées prises dans ce plan $y'Ax'$: il sera déterminé par l'angle θ qu'il forme avec le plan xy, et par l'angle φ que fait avec Ax l'intersection Ax' de ces plans ; nous prendrons cette ligne Ax' pour axe des x' : la perpendiculaire Ay', menée sur Ax' dans le plan coupant sera l'axe des y'. 17.

Comme il s'agit d'avoir en $x'y'$ l'équation de la courbe d'intersection des surfaces, il est clair qu'après avoir fait la transformation de coordonnées (A), pour rapporter l'une de ces surfaces aux axes $x'y'z'$, il suffira de faire ensuite $z' = 0$, et on aura son intersection avec le plan $x'Ay'$. Il est préférable, dans un cas aussi simple de faire $z' = 0$ dans les équations (A), et de chercher directement les cosinus de $(x'x)$, $(y'x)$..... Dans l'angle trièdre $y'Ax'x$, on connoît les angles plans $a = \varphi$, $b = 100^\circ$, et l'angle dièdre compris $C = \theta$: donc l'équation (2) du n°. 590 devient

$$\cos(y'x) = \sin\varphi\cos\theta, \quad \text{d'où } \cos(y'y) = -\cos\varphi\cos\theta,$$

en changeant φ en $100^\circ - \varphi$, et θ en $200^\circ - \theta$. De plus

$$x'x = \varphi, \quad \cos(x'y) = \sin\varphi, \quad x'z = 100^\circ.$$

Enfin le plan $y'Ax'$, qu'on suppose élevé au-dessus de celui xy, fait avec l'axe Az l'angle $(y'z) = 100^\circ - \theta$. Ainsi les équations ($A$) donnent

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi\cos\theta \\ y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi\cos\theta \\ z = y'\sin\theta. \end{array}\right\} \ldots \quad (B)$$

18. 625. Prenons le cône oblique pour exemple : en plaçant le sommet A à l'origine, et le cercle de la base ICD parallèle au plan xy, le centre C ayant pour coordonnées $a\ b\ g$; enfin le rayon $CI = r$; l'équation de cette surface est (608)

$$(az - gx)^2 + (bz - gy)^2 = r^2z^2.$$

Pour obtenir toutes les sections de ce cône par un plan, transportons l'origine en un point (α, β, γ) du plan xz, puis prenons le plan coupant, tel que sa trace sur le plan xy soit l'axe même des y'. Il résulte de cette disposition que, 1°. en faisant varier $a\ b\ g\ r$... notre calcul donnera toutes les sections coniques possibles ; 2°. il faudra dans nos équations B faire $\varphi = 100°$, d'où

$$x = \alpha + cy',\quad y = x',\quad z = \gamma + sy',$$

c étant le cosinus et s le sinus de θ. On trouvera pour l'équation de l'intersection, et faisant $a^2 + b^2 - r^2 = k$,

$$k(\gamma + sy')^2 + g^2(x'^2 + (\alpha + cy')^2) = 2g(\gamma + sy')(a\alpha + bx' + acy');$$

ainsi il sera facile de discuter cette équation (453) ; et de reconnoître que les intersections sont les mêmes que dans le cône droit.

Si on veut obtenir un cercle, il faut que les coefficiens (443) de x'^2 et y'^2 soient égaux, et que celui de $x'y'$ soit nul ; d'où

$$sbg = 0 \quad (k - g^2)s^2 = 2agcs$$

$s = 0$ satisfait à ces deux équations ; ainsi tous les plans parallèles à la base donnent des cercles ; mais ils ne jouissent pas seuls de cette propriété. En effet, on a $\frac{s}{c} = \frac{2ag}{k - g^2}$, ce qui exige que la première équation donne $b = 0$: donc tang $\theta = \frac{2ag}{a^2 - r^2 - g^2}$. D'une part $b = 0$

indique que le plan xz, auquel le plan coupant est perpendiculaire, l'est lui-même à la base du cône, qu'il coupe suivant le triangle AID : de l'autre 18.

$$CG = a,\ AG = g,\ IG = a - r,\ GD = a + r,$$

$$\text{tang}\, D = \frac{AG}{GD} = \frac{g}{a + r},\ \text{tang}\, B = \frac{g}{a - r};$$

en faisant l'angle $AIG = B$. Menons IL qui fasse l'angle $AIL = IDA = D$; soit l'angle $ILx = L$, nous aurons

$$\text{tang}\, L = \text{tang}\,(B + D) = \frac{\text{tang}B + \text{tang}D}{1 - \text{tang}B\,\text{tang}D} = \frac{2ag}{a^2 - r^2 - g^2},$$

ainsi, $L = t$, ce qui signifie que le plan perpendiculaire au triangle IAD mené suivant IL et tous ceux qui lui sont parallèles coupent le cône suivant des cercles. C'est ce qu'on nomme les *Sections sous-contraires*.

Le cylindre droit qui a pour axe celui des z, et R pour rayon de sa base, a pour équation (602), ... $x^2 + y^2 = R^2$: les équations B donnent pour celle de l'intersection par un plan quelconque $x'^2 + y'^2 c^2 = R^2$; cette section est donc une ellipse : elle devient un cercle lorsque $c = 1$; alors le plan est perpendiculaire à l'axe. Comme l'équation est indépendante de φ, on voit que tous les plans qui font le même angle avec l'axe du cylindre, donnent la même courbe.

truira le 2°. de la suivante, et la somme sera $\frac{B-A}{h}$ ou $n \times \left(\frac{B-A}{b}\right)$, à cause de $b = nh$. La quantité $\frac{B-A}{b}$ est le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable x, lorsqu'on la suppose $= a$ et $= a + b$; elle est indépendante de h; et comme elle est la n^e. partie de la somme de nos n fractions, elle doit être comprise entre celles-ci, puisque les unes doivent être $>$, et les autres $< \frac{B-A}{b}$, pour que leur somme soit n fois cette dernière quantité.

Il suit de là que, h a et b demeurant constans, si on fait varier x depuis a jusqu'à $a + b$, en passant par toutes les valeurs intermédiaires, $\frac{Y-y}{h}$ devra, en vertu de la loi de continuité qu'on suppose exister dans la fonction y, prendre toutes les valeurs depuis $\frac{A_1-A}{h}$ jusqu'à $\frac{B-A_{n-1}}{h}$; cela se voit par un raisonnement analogue à celui du n°. 495. Il y a donc une valeur de x qui rend $\frac{Y-y}{h} = \frac{B-A}{b}$.

Prenons une autre quantité $c < b$, et commensurable avec b, ou $\frac{b}{c} = \frac{n}{m}$, h sera la m^e. partie de c et $\frac{Y-y}{h}$ pourra devenir aussi $= \frac{C-A}{c}$, par une valeur de x entre a et $a + c$, C étant la valeur de y qui répond à $x = a + c$.

Les diverses valeurs de $\frac{Y-y}{h}$, depuis $x=a$ jusqu'à $x=a+b$ s'écartent les unes des autres dans de certaines limites qui dépendent de la grandeur de b; mais on a pu prendre d'abord h assez petit, et par conséquent l'arbitraire n assez grande, pour que h reste le même pendant que b et n décroîtront : en sorte que la 1re. fraction $\frac{A_1-A}{h}$ sera encore la même; mais la dernière sera comprise dans l'étendue des valeurs précédentes de $\frac{Y-y}{h}$: on pourra donc rendre cette étendue indéfiniment petite sans que $\frac{B-A}{b}$, $\frac{C-A}{c}$ cessent d'y être compris, b et c diminuant sans cesse, quoique conservant le même rapport arbitraire.

Pour mieux faire concevoir ce raisonnement, essayons de le peindre aux yeux. Construisons la courbe $CEGI$ qui a pour ordonnée $z=\frac{Y-y}{h}$; h ayant une valeur déterminée, $\frac{Y-y}{h}$ est une fonction de x qui n'est ni infinie ni interrompue depuis $x=AK=a$, jusqu'à $x=AK'=a+b$. KN et $K'N'$ seront les valeurs de nos fractions extrêmes précédentes; GF la plus grande et IK la plus petite ordonnée entre lesquelles. . . . . $\frac{B-A}{b}$ et $\frac{C-A}{c}$ sont compris. Mais si b et c décroissent, h restant le même, la courbe et la 1re. ordonnée NK ne changeront pas; seulement la dernière $K'N'$ se transportera plus près de NK, tel qu'en PM. Si donc h a été pris très-petit $\frac{B-A}{b}$, $\frac{C-A}{c}$ seront intermédiaires

entre deux ordonnées NK et GF aussi voisines qu'on voudra.

On voit donc qu'on peut regarder chacune de ces quantités comme la somme de deux autres, l'une qui décroît indéfiniment avec b et c, l'autre qui en est indépendante. Soit p cette dernière, qui est fonction de a seul, on a $\frac{B-A}{b}=p+\alpha$, α devenant indéfiniment petit avec b. Il ne peut d'ailleurs y avoir une autre fonction q de a qui remplisse la même condition que p; car si on pouvoit avoir aussi $\frac{B-A}{b}=q+\beta$, on auroit $p+\alpha=q+\beta$, d'où $p=q$, $\alpha=\beta$ (167).

Concluons de là que, si aucune valeur depuis x jusqu'à $x+h$ ne rend fx infinie, le rapport $\frac{Y-y}{h}$ sera composé d'une fonction α de x et h, qui décroît indéfiniment avec h, et d'une fonction de x seul, que nous désignerons par y', et que nous nommerons le *Coefficient différentiel*, ou avec Lagrange *la Dérivée* de fx. Ainsi

$$\frac{Y-y}{h}=y'+\alpha,\quad \text{d'où } Y=y+y'h+\alpha h,$$

et comme y' est le terme vers lequel tend sans cesse $\frac{Y-y}{h}$, on voit que *la dérivée est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable.*

627. Puisque nous pouvons prendre h assez petit et n assez grand pour que nos fractions soient aussi voisines qu'on voudra, et qu'elles sont les valeurs de $y'+\alpha$, on voit que α pourra être rendu aussi petit qu'on voudra. Chacune de ces fractions aura donc le même signe que y', qui sera celui de leur somme, et par consé-

quent de $\frac{B-A}{b}$. Donc *si* y = fx *ne devient pas infini de* x = a *à* x = a + b, *et si* y′ *conserve le même signe, ce sera celui du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable.*

628. La manière dont la dérivée y' est composée en x dépend de la proposée y dont elle porte l'empreinte. Il faut dans chaque cas particulier savoir trouver cette dérivée et la règle qu'il faut observer pour cela suit de sa définition. *On changera* x *en* x + h *dans la fonction proposée* fx, *puis on exécutera les calculs nécessaires pour mettre en évidence le terme affecté de* h^1 *dans la fonction variée* Y = f (x + h); *la dérivée cherchée* y′ *sera le coefficient de ce terme.* En effet, Y étant mis sous la forme $y + Ah + \alpha h$, où α est supposé indéfiniment petit avec h, on aura $\frac{Y-y}{h} = A + \alpha$, d'où $A = y'$.

C'est ainsi qu'on trouvera 1, $2x$, $3x^2$, $4x^3$... pour dérivées de x, x^2, x^3, x^4... Mais comme ce procédé seroit très-pénible, il convient d'avoir des règles qui dispensent d'y recourir : nous allons nous occuper de la recherche de ces règles.

2. *Différentiation des Fonctions algébriques.*

629. Soit $y = A + Bu - Ct$... A B C... étant des constantes, u t... des fonctions de x. Pour obtenir la dérivée, appliquons la règle générale. En mettant $x + h$ pour x, A ne changera pas, Bu deviendra $B\,(u + u'h + \alpha h)$, Ct sera changé en $C\,(t + t'h + \beta h)$; ainsi, on aura

$$Y = (A + Bu - Ct...) + (Bu' - Ct'...)h + B\alpha h + C\beta h$$

d'où $\quad y' = Bu' - Ct'...$

Ainsi *la dérivée d'une fonction qui a plusieurs termes est la somme de celle de chaque terme, auquel on conserve son signe et son coefficient. Les termes constans ont zéro pour dérivée.*

Ainsi $y = a^2 - x^2$ donne $y' = -2x$.

$y = 1 + 4x^2 - 5x - 3x^3$ donne $y' = 8x - 5 - 9x^2$.

630. Soit $y = ut$, u et t étant toujours des fonctions de x. Mettons $x + h$ pour x, il viendra

$$Y = (u + u'h + \alpha h)(t + t'h + \beta h)$$
$$= ut + (u't + ut')h + \ldots\ldots$$

Donc $\quad y' = u't + ut'$.

De même, soit $y = utv$, en faisant $tv = z$, on a $y = uz$; z étant une fonction de x. On trouve, d'après ce qu'on vient de voir,

$$y' = zu' + uz' \text{ et } z' = tv' + vt'.$$

Donc $\quad y' = tvu' + tuv' + uvt'$.

Ainsi *la dérivée du produit de plusieurs fonctions de* x *est la somme de celles qu'on obtient en regardant tour-à-tour chacune d'elles comme seule variable.* Il seroit en effet facile d'étendre notre démonstration à 4, 5.... facteurs. Au reste, nous reviendrons sur ce sujet (649, 1°.).

$y = (a + x)(a - x)$ a pour dérivée $(a - x) - (a + x)$, puisque $+1$ et -1 sont les dérivées des facteurs : ainsi $y' = -2x$, comme on l'a vu ci-dessus.

$y = (a + bx)x^3$ donne $y' = bx^3 + 3x^2(a + bx)$, parce que b et $3x^2$ sont les dérivées de $a + bx$ et x^3.

631. z et u étant des fonctions identiques de x, leurs dérivées z' et u' le seront aussi ; car, puisque l'équation $z = u$ subsiste quel que soit x, changeons x en $x + h$,

nous aurons $z + z'h + \alpha h = u + u'h + \beta h$, d'où $z' + \alpha = u' + \beta$ et $z' = u'$ (167). Il est clair que les dérivées de z' et u' seront aussi identiques, ce qu'on exprime par $z'' = u''$: et ainsi de suite.

632. D'après cela, soit $y = \frac{u}{t}$, on en tire $yt = u$, et prenant les dérivées, $yt' + y't = u'$, puisque yt, et u sont des fonctions identiques de x ; on en tire

$$y' = \frac{u' - t'y}{t} \text{ ou } y' = \frac{u't - ut'}{t^2}$$

en remettant $\frac{u}{t}$ pour y. Concluons de là que *la dérivée d'une fraction est égale à celle du numérateur; moins le produit de celle du dénominateur par la fraction même, le tout divisé par le dénominateur :*

Ou au dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur, moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.

On pourroit aussi tirer cette règle de ce que.... $Y = \frac{u + u'h + \alpha h}{t + t'h + \beta h}$; car les deux 1ers. termes du quotient sont $\frac{u}{t} + \frac{tu' - ut'}{t^2} h$.

Si le numérateur u est constant, alors il suffit de faire $u' = 0$ dans notre résultat, et on trouve..... $y' = -\frac{ut'}{t^2}$: ainsi *la dérivée d'une fraction dont le numérateur est constant, est, en signe contraire, le produit de la dérivée du dénominateur, par la fraction proposée dont on a carré le dénominateur.*

Soit $y=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{1-x}$; on a $y'=\frac{1}{a}-\frac{(2-x)x}{(1-x)^2}$.
$y=-\frac{1}{x^2}$ donne $y'=\frac{2}{x^3}$. Enfin $y=\frac{a+\frac{1}{2}bx^2}{3-2x}$ donne

$$y'=\frac{(3-2x)bx-(a+\frac{1}{2}bx^2)(-2)}{(3-2x)^2}=\frac{(3-x)bx+2a}{(3-x)^2}.$$

633. Supposons qu'en représentant par z un assemblage de termes en x, la fonction $y=fx$ devienne plus simple et composée en z seul, en sorte que $z=Fx$ change la fonction proposée en $y=\varphi z$; voyons comment on peut obtenir la dérivée de fx, en employant seulement Fx et φz. Mais nous avons plusieurs quantités variables, et notre notation ne suffit plus à notre objet, puisque y' ne distingueroit pas la dérivée de $y=fx$, de celle de $y=\varphi z$. La dérivée de y s'écrit aussi dy; et comme celle de x est $=1$, nous désignerons celle de $y=fx$ par $\frac{dy}{dx}$, le diviseur dx qui est $=1$, indiquera que dans le calcul la *variable principale* est x. De même, s'il s'agit de $y=\varphi z$, et qu'on veuille regarder z comme variable principale sans avoir égard à x, $\frac{dy}{dz}$ désignera la dérivée, parce que d$z=1$. On appelle alors dy la différentielle de y, expression synonyme de dérivée, et qui n'en diffère que par la notation qu'elle exige.

Supposons donc qu'on change z en $z+k$,

$$y=\varphi z \text{ deviendra } Y=y+\frac{dy}{dz}k+\alpha k;$$

mais la nature de la question exige que cet accroissement k ne soit pas arbitraire, et qu'il résulte de celui que x a reçu. En mettant $x+h$ pour x

$$z = Fx \text{ deviendra } Z = z + \frac{dz}{dx}h + \beta h;$$

en sorte que $k = Z - z = \frac{dz}{dx}h + \beta h$. Substituons pour k cette valeur, nous aurons

$$Y = y + \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}h + \frac{dy}{dz}\beta h + \ldots$$

Donc $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx};$$

le second membre (*) est le produit des dérivées de φz et Fx prises l'une relativement à z, l'autre à x. Donc *la dérivée d'une fonction de* z*, lorsque* z *est elle-même une fonction de* x*, est le produit des dérivées de ces deux fonctions.*

Soit $y = (a + bx)^2$, en faisant $z = a + bx$, d'où $z' = b$, on a $y = z^2$, donc $\frac{dy}{dz} = 2z$ et . . . .
$\frac{dy}{dx} = 2z \times b = 2b\,(a + bx)$. De même $y = \frac{a + bx}{(1 - x)^2}$ a pour dérivée (632)

$$y' = \frac{(1 - x)^2.b - (a + bx)\,\{(1 - x)^2\}'}{(1 - x)^4}.$$

Or, pour avoir la dérivée de $(1 - x)^2$, on fera $1 - x = z$, et on aura z^2, d'où $2z.z' = \{(1 - x)^2\}' = -2(1 - x)$:

(*) Il faut remarquer que dans l'une de ces fractions dz est $= 1$, et désigne en outre que la dérivée de y est prise par rapport à z seul : dans l'autre qui représente la dérivée de z par rapport à x, c'est dx qui est l'unité. On ne peut donc supprimer dz sous prétexte que cette différentielle seroit multiplicateur et diviseur.

donc $y' = \frac{bx + 2a + b}{(1 - x)^3}$. En général, lorsque la valeur qu'on doit égaler à z n'est pas très-compliquée, on peut faire le calcul sans l'introduction de cette fonction. C'est ainsi qu'on trouve de suite que, pour ...... $y = (a - 2x + x^3)^3$, $y' = 3(a - 2x + x^3)^2 (3x^2 - 2)$.

634. Lorsque la fonction proposée $y = fx$, est telle que $z = Fx$, laisse x dans la fonction, il faut encore égaler à u un autre grouppe de termes en x, en sorte que $u = \psi x$, donne $y = \varphi(z, u)$. Comme cette dernière équation est bien plus simple que $y = fx$, nous allons de même chercher la dérivée de celle-ci par le secours de l'autre.

Il s'agit pour cela de changer x en $x + h$, ce qui entraînera pour z et u les accroissemens

$$k = \frac{dz}{dx} \cdot h + \alpha h, \; i = \frac{du}{dx} \cdot h + \beta h;$$

puis de substituer $z + k$ pour z, et $u + i$ pour u, dans la fonction composée $y = \varphi(z, u)$. Or, cette partie de notre calcul seroit visiblement la même, si z et u au lieu d'être des fonctions de x, étoient des variables indépendantes ; nous pouvons donc les regarder comme telles pour un moment ; nous changerons d'abord u en $u + i$, sans changer z ; puis dans le résultat nous mettrons $z + k$ pour z, sans faire varier u.

Mais en mettant $u + i$ pour u, $\varphi(z, u)$ ne doit être regardé que comme contenant u et des constantes, au nombre desquelles z est ; ainsi $y = \varphi(z, u)$ deviendra

$$y + \frac{dy}{du} i + \gamma i.$$

Il faut donc changer dans cette expression z en $z + k$.

Prenons d'abord le 1er. terme y; on doit y regarder z comme seule variable, en sorte que y devient........ $y+\frac{dy}{dz}k+\delta k$. Le 2e. terme $\frac{dy}{du}i$ est aussi une fonction où z seule varie; ainsi en changeant z en $z+k$, le premier terme sera $\frac{dy}{du}i$. On voit donc qu'en se bornant aux termes dont le coefficient ne dépend pas de i et k, on a

$$Y=y+\frac{dy}{dz}k+\frac{dy}{du}i+\ldots$$

mais les accroissemens k et i ont des valeurs connues qui dépendent de celui que x a reçu. En substituant il vient

$$Y=y+\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right)h+\iota h$$

on remarque que les termes où i et k ont plus d'une dimension en produisent qui sont étrangers à la dérivée qu'on cherche, et contenus dans ιh. Donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

le 1er. terme est la dérivée par rapport à z seul, et le 2e. est celle relative à u seul. Donc, *la dérivée d'une fonction composée de différentes fonctions particulières, sera la somme des dérivées relatives à chacune de celles-ci considérées séparément et indépendamment l'une de l'autre.* On pourra en effet raisonner de même pour....... $y=\phi(z, u, t\ldots)$, $z\, u\, t\ldots$ étant des fonctions de x. Les règles (630 et 631) sont des cas particuliers de celle-ci.

pour $$y=\frac{(1-x^2)^2-(3-2x)\,x}{4-5x},$$

Donc (633) celle de z^m est $mz^{m-1}z'$. Ainsi *la dérivée d'une fonction élevée à une puissance se trouve en multipliant la dérivée de cette fonction par son exposant, et par cette fonction avec une puissance moindre d'une unité.*

Soit $y=\frac{a}{x^m}=ax^{-m}$, on a $y'=\frac{-ma}{x^{m+1}}$.

$y=x^3(a+bx^2)$ devient $y=x^3z$ en faisant $z=a+bx^2$: la règle des produits donne

$$y'=3x^2z+x^3z' \text{ ou } y'=x^2(3a+5bx^2).$$

636. Les dérivées des fonctions radicales se tirent de là; soit $y=\sqrt[m]{z}=z^{\frac{1}{m}}$, on a $y'=\frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}-1}z'=\frac{z'}{m\sqrt[m]{z^{m-1}}}$.

Comme les radicaux du 2e. degré se rencontrent plus souvent, il est bon d'avoir une règle qui dispense alors de recourir à la puissance $\frac{1}{2}$; $m=2$ donne $y=\sqrt{z}$ et $y'=\frac{z'}{2\sqrt{z}}$. Ainsi *la dérivée d'une fonction affectée d'un radical carré est le quotient de la dérivée de cette fonction, divisée par le double du radical.*

637. Ces règles suffisent pour trouver la dérivée de toute fonction algébrique, sans avoir recours à la substitution de $x+h$; et, comme il convient d'être fort exercé à la pratique de ces calculs, nous en donnerons quelques exemples.

1°. $y=\sqrt[4]{(a+bx^2)^5}$ en faisant $z=a+bx^2$ devient $y=z^{\frac{5}{4}}$ d'où

$$y'=\tfrac{5}{4}z^{\frac{1}{4}}z'=\tfrac{5}{4}\sqrt[4]{(a+bx^2)}\times 2bx=\tfrac{5}{2}bx\sqrt[4]{(a+bx^2)}.$$

2°. $y=\sqrt[5]{x^3}$, donne $y'=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$.

3°. $y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$ donne $y' = \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}$.

4°. De $y = (a + bx + cx^2)^m$ on tire

$$y' = m\ (a + bx + cx^2)^{m-1} \times (b + 2cx).$$

5°. De $y = (ax^3 + b)^2 + 2\sqrt{(a^2 - x^2)} \times (x - b)$, on tire $y' = 6ax^2\ (ax^3 + b) + \frac{2a^2 - 4x^2 + 2bx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

6°. $y = \frac{x}{-x + \sqrt{(a^2 + x^2)}}$ donne

$$y' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)}\ (2x^2 + a^2 - 2x\sqrt{a^2 + x^2})};$$

Si on eût multiplié haut et bas la fraction proposée par $\sqrt{(a^2 + x^2)} + x$, on auroit eu

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a^2}\sqrt{(a^2 + x^2)}, \text{ d'où } y' = \frac{2x}{a^2} + \frac{a^2 + 2x^2}{a^2\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

3. *Dérivées des Ordres supérieurs et des Equations.*

638. Après avoir trouvé la dérivée y' d'une fonction y, on peut traiter à son tour y' comme celle-ci. La dérivée de y' se nomme du *second ordre*, et se marque y'', ou d^2y; celle de y'' est du *troisième ordre*, et se désigne par y''', ou d^3y, et ainsi de suite.

Par exemple, $y = \frac{1}{x}$ donne $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$, $y''' = -\frac{2.3}{x^4}$, ... $y^{(n)} = \pm\frac{2.3...n}{x^{n+1}}$.

De même $y = \sqrt{x}$ donne $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = \frac{-1}{2^2.\sqrt{x^3}}$, $y''' = \frac{1.3}{2^3.\sqrt{x^5}}$, ... $y^{(n)} = \pm\frac{1.3.5....(2n-3)}{2^n.\sqrt{x^{2n-1}}}$.

$y = x^m$ donne $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}, \ldots$
$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

Lorsque la fonction proposée contient plusieurs fonctions variables, alors les dérivées des ordres supérieurs relatives à chacune, les autres étant regardées comme constantes, se désignent comme on l'a dit (633). Ainsi $\frac{d^3y}{dz^2du}$ indique qu'on prendra la dérivée du second ordre de y relativement à z, et qu'on prendra ensuite celle du résultat par rapport à u. Il sera d'ailleurs démontré (663) que l'ordre qu'on suit dans ces divers calculs peut être quelconque, sans que le résultat soit pour cela différent; en sorte qu'on pourroit aussi prendre d'abord la dérivée de y par rapport à u, et ensuite deux fois relativement à z, ou d'abord par rapport à z, puis à u et enfin à z.

639. Soit une équation $F(x,y) = 0$ entre deux variables x et y; il seroit aisé d'obtenir y' si on la résolvoit par rapport à y, et prenant la dérivée de $y = fx$; mais ce calcul n'est pas toujours praticable, et on doit chercher à obtenir y' sans y recourir. Si on mettoit fx pour y dans $F(x,y) = 0$, cette équation devroit former une fonction z de x identiquement nulle. On auroit donc (631) $z' = 0$, $z'' = 0$, ... On prendra donc la dérivée de $z = F(x,y) = 0$, comme si y représentoit un grouppe de termes en x, c'est-à-dire en suivant la règle (634). On aura

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}y' = 0, \text{ ou } \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = 0,$$

les coefficiens $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ sont des fonctions connues de x

et y, qu'on nomme *Différentielles partielles*. On tirera aisément de là y'.

Soit $y^2+x^2=r^2$, on a $z=x^2+y^2-r^2=0$; donc $\frac{dz}{dx}=2x$, $\frac{dz}{dy}=2y$, et $x+yy'=0$, $y'=-\frac{x}{y}$.

De même $x^2+y^2-2rx=r^2$ donne $yy'+x-r=0$, d'où $y'=\frac{r-x}{y}$.

De $y^4+2ax^2y-by^3=0$, on tire

$$(4y^3+2ax^2-3ay^2)y'+4axy=0 \text{ et } y'=\frac{-4axy}{4y^3+2ax^2-3ay^2}.$$

640. Il est vrai que ce calcul ne donne la valeur de y' qu'en x et y, et non pas en fonction de x seul, comme on l'auroit en résolvant par rapport à y l'équation proposée $F(x,y)=0$. Il faudroit donc éliminer y entre celle-ci et sa dérivée. Ce calcul, qui est rarement utile, a l'inconvénient de conduire à une équation où y' n'est pas du premier degré : ainsi

$$y^2+x^2=r^2 \text{ donne } y=-\frac{x}{y'},$$

substituant, il vient $x^2(1+y'^2)=r^2y'^2$, ... d'où $y'=\frac{\pm x}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$, comme si on eût pris la dérivée de $y=\pm\sqrt{(r^2-x^2)}$.

En général, y' s'élève au degré même où y entre dans $F(x,y)=0$; car si y a n valeurs dans $y=fx$, comme le calcul qui donne la dérivée y' laisse subsister les radicaux de fx (636), y' doit avoir aussi n valeurs. Si donc y' n'entre qu'au premier degré dans $\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}y'=0$, cela vient de ce que y y entre et comporte ces mêmes radicaux : l'élimination de y doit donc les reproduire.

641. Dans la dérivée de $F(x,y)=0$, y et y' sont des fonctions de x, d'où il suit qu'en substituant ces fonctions, la dérivée deviendroit identiquement nulle; on peut donc de nouveau chercher la dérivée de celle-ci, qui est celle du 2e. ordre de $F(x,y)=0$; on suivra d'ailleurs toujours la règle (634). Par la même raison, on peut chercher la dérivée du 3e., 4e. ..... ordre.

Reprenons donc $\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}y'=0$, et, remarquant que $\frac{d^2z}{dydx}=\frac{d^2z}{dxdy}$ (638), nous aurons

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}y'+\frac{dz}{dy}y''+\frac{d^2z}{dy^2}y'^2=0,$$

équation du 1er. degré en y'', qui donnera y'' ou $\frac{dy'}{dx}$, en fonction de x, y et y'. Si on veut éliminer y', on emploiera la dérivée du 1er. ordre, et si on veut que y'' soit exprimé en x seul, il faudra chasser en outre y à l'aide de $F(x,y)=0$; mais alors le degré de y'' pourra s'élever.

Il en est de même des dérivées des ordres supérieurs : le coefficient de y' y'' y'''........ est toujours $\frac{dy}{dz}$.

C'est ainsi que $x^4+2ax^2y-ay^3=0$

donne $(2ax^2-3ay^2)y'+4x^3+4axy=0$

$(2ax^2-3ay^2)y''+12x^2+4ay+8axy'-6ayy'^2=0$,

etc.

642. Lorsqu'on prend la dérivée de $F(x,y)=0$, il y a en général une constante qui disparoît; c'est ainsi que l'équation $x^2+y^2=r^2$ a sa dérivée $x+yy'=0$ indépendante de r, et exprime une propriété commune

à tous les cercles dont le centre est à l'origine (377). On élimineroit d'ailleurs toute constante qu'on voudroit entre une équation et sa dérivée : $y=ax+b$ donne $y'=a$, qui ne contient pas b; éliminons a, b reparoîtra, et nous aurons $y=xy'+b$.

Une deuxième dérivation chasse une nouvelle constante, et ainsi de suite; de sorte qu'on peut, en prenant autant de dérivées successives qu'il y a de constantes dans une équation proposée, les éliminer toutes : le résultat exprime une propriété de cette équation, qui subsiste quelles que soient les constantes. $y^2=a-kx^2$ donne $yy'=-kx$, puis $yy''+y'^2=-k$; éliminons k entre ces deux dernières équations, nous aurons...... $yy'=(yy''+y'^2)x$, qui est dégagée de a et de k.

La constante c, qu'on chasse par l'élimination, disparoîtroit aussi (629) en tirant la valeur de c de l'équation proposée, et prenant ensuite la dérivée : comme les résultats de ces calculs doivent être équivalens, et que celui-ci introduit des radicaux, lorsque c porte des exposans, il s'ensuit que le degré de y' doit s'élever dans l'équation finale qui résulte de l'élimination de c entre la proposée et sa dérivée. Ainsi

$$y^2-2cy+x^2=c^2 \text{ donne } (y-c)y'+x=0,$$

mettant $y+\dfrac{x}{y'}$ pour c dans la première, on a

$$(x^2-2y^2)y'^2-4xyy'-x^2=0.$$

643. On voit donc que toute dérivée de l'ordre n de $F(x,y)=0$ ne doit contenir $y^{(n)}$ qu'au 1er. degré; et lorsqu'il n'en est pas ainsi, l'équation ne provient pas d'une dérivation immédiate, mais de l'élimination d'une constante ou de x, ou y..... entre la proposée et sa dérivée.

4. *Formule de Taylor.*

644. Faisons $x+h=i$ dans l'équation $Y=y+y'h+\alpha h$, elle deviendra

$$fi=y+P(i-x)$$

P désignant la fonction de i et x qu'on obtient pour $y'+\alpha$, quand on y a mis $i-x$ pour h. Cette équation contient deux quantités indépendantes i et x; on peut donc en prendre les dérivées successives par rapport à x seul (631). Nous aurons

$$\begin{array}{ll} 0=y'+P'(i-x)-P & \text{d'où } P=y'+P'(i-x) \\ 0=y''+P''(i-x)-2P' & P'=\frac{1}{2}y''+\frac{1}{2}P''(i-x) \\ 0=y'''+P'''(i-x)-3P'' & P''=\frac{1}{3}y'''+\frac{1}{3}P^{\text{IV}}(i-x) \\ 0=y^{\text{IV}}+P^{\text{IV}}(i-x)-4P''' & P'''=\frac{1}{4}y^{\text{IV}}+\frac{1}{4}P^{\text{IV}}(i-x) \end{array}$$

etc....... P' P''...... sont ici les dérivées de la fonction de x et i représentée par P, i étant constant. Si on fait les substitutions successives de P P' P''..... on a

$$fi=y+y'(i-x)+\frac{y''}{2}(i-x)^2+\frac{y'''}{2.3}(i-x)^3+\ldots$$

et, remettant $x+h$ pour i,

$$f(x+h)=y+y'h+\frac{y''h^2}{2}+\frac{y'''h^3}{2.3}+\ldots.. \qquad (A)$$

Cette série porte le nom de Taylor qui l'a découverte : elle sert à développer suivant les puissances de l'accroissement h de la variable x, toute fonction de $x+h$.

Cette démonstration est d'Ampère.

Le terme général résulte du calcul même ; il est

$$T=\frac{y^{(n)}h^n}{2.3.4\ldots n}\ \ldots\ldots\ldots \qquad (B)$$

Ce développement sera celui de $f(x+h)$, pourvu que

les valeurs attribuées à x et h ne rendent pas infinies dans leur intervalle les fonctions y P y' P'.......... Car alors le principe dont nous sommes partis pourroit ne plus avoir lieu (626) : ce sera le sujet d'un examen particulier. Mais comme il n'y a que des valeurs isolées de x et h qui puissent rendre nos fonctions infinies, il est visible que si on donne à h une valeur quelconque, et si on laisse x indéterminé, la série de Taylor sera vraie, puisqu'il n'y a que des valeurs particulières de x qui puissent rendre infinis y P y' P'.... *Voy.* n°. 657.

645. Appliquons ceci à des exemples :

I. Soit $y = \frac{1}{x}$, on a (638) aisément y' y''... $y^{(n)}$ et

$$\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + \frac{h^2}{x^3} - \ldots\ldots \pm \frac{h^n}{x^{n+1}} \ldots$$

En multipliant les deux membres par a, on auroit le développement de $\frac{a}{x+h}$, d'où résulte la théorie des séries recurrentes à échelle simple (561).

II. Soit $y = \sqrt{x}$, on tirera (638), y' y''... et on aura

$$\sqrt{(x+h)} = \sqrt{x} + \frac{h}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2.4\sqrt{x^3}} \cdot h^2 \ldots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}} \cdot \frac{h^n}{2.3\ldots n}$$

III. Pour $y = \frac{x^2 - k^2}{x} = x - \frac{k^2}{x}$, on trouve

$$\frac{(x+h)^2 - k^2}{x+h} = \frac{x^2 - k^2}{x} + \left(1 + \frac{k^2}{x^2}\right) h - \frac{k^2 h^2}{x^3} + \ldots$$

IV. $y = x^m$ donne de même (638)

$$(x+h)^m = x^m + m x^{m-1} h + m.\frac{m-1}{2}.x^{m-2} h^2 + \ldots$$

$$+ m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\ldots\frac{m-n+1}{n}.x^{m-n} h^n \ldots$$

Voici donc une démonstration de la formule de Newton, l'exposant m étant quelconque négatif, ou fractionnaire, ou irrationnel, etc.

646. Il suit de la loi des dérivées successives obtenues dans le n°. 644, que la somme S des termes qui suivent le $(n+1)^e$, qui est le terme général T, est

$$S=\frac{P^{(n)}h^{n+1}}{2.3\ldots n},\ \text{où}\ P=\frac{fi-fx}{i-x}.$$

Ainsi, pour $y=\sqrt{x}$, on a $P=\frac{\sqrt{i}-\sqrt{x}}{i-x}$ qui se réduit à $P=\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{x}}$, d'où on tire

$$P'=\frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{i}+\sqrt{x})^2},\ P''=\frac{\sqrt{i}+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(\sqrt{i}+\sqrt{x})^3},\ldots$$

Lorsqu'on ne pousse le développement de $\sqrt{(x+h)}$ que jusqu'au 3e. terme h^2, $n=2$ donne pour la somme des autres termes

$$S=\frac{\{3\sqrt{x}+\sqrt{(x+h)}\}h^3}{8x\sqrt{x}\{\sqrt{x}+\sqrt{(x+h)}\}^3}.$$

De même pour $y=\frac{x^2-k^2}{x}=x-\frac{k^2}{x}$, on a

$$P=\frac{i-k^2i^{-1}-x+k^2x^{-1}}{i-x}=1+\frac{k^2}{ix};$$

d'où prenant les dérivées relativement à x seul,

$$P'=-\frac{k^2}{ix^2},\ P''=\frac{2k^2}{ix^3},\ \ldots\ S=\frac{k^2h^3}{(x+h)x^3},$$

en arrêtant la série au 3e. terme.

5. *Des Exponentielles et des Logarithmes.*

647. Cherchons la dérivée de $y = a^x$. La règle donnée (628) conduit à

$$Y = a^{x+h} = a^x.a^h = a^x + y'h + \alpha h,$$

d'où . . . . $a^h = 1 + \frac{y'h}{a^x} + \frac{\alpha h}{a^x}$:

le 1er. membre ne dépend que de h, ainsi x ne doit pas entrer dans $\frac{y'}{a^x}$, d'où $y' = ka^x$; k étant une constante inconnue. On a donc

$$y' = ka^x, y'' = k^2a^x, y''' = k^3a^x, \ldots y^{(n)} = k^na^x,$$

et la formule de Taylor devient

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{2.3} \ldots + \frac{k^nx^n}{2.3\ldots n} \ldots$$

La constante k est une fonction de a, puisque si k étoit un nombre, la série de a^x resteroit la même quel que fût a. Il est aisé d'en tirer, comme n°. 575,

$$e^k = a, \text{ d'où } k = \frac{\text{Log } a}{\text{Log } e} = \log a,$$

en désignant par e la valeur 2,71828... de a qui répond à $k = 1$. Nous avons employé le signe log. pour désigner les logarithmes népériens, conformément à la notation établie n°. 575., que nous conserverons toujours par la suite.

On retrouve ainsi les séries A et B du n°, 575, et on a $y' = a^x \log a$. La dérivée de a^z est $a^z.z' \log a$, (633); ainsi *la dérivée d'une exponentielle est le produit de cette même quantité, par le logarithme népérien de la base et par la dérivée de l'exposant.*

$y = e^{mz}$ donne $y' = e^{mz}.mz'$

$y = a^{3x+1}$ .... $y' = a^{3x+1}.3\log a$

$y = a^{\sqrt{(2x+1)}}$ .... $y' = a^{\sqrt{(2x+1)}}.\dfrac{\log a}{\sqrt{(2x+1)}}$.

648. Prenons maintenant $y = \text{Log}\, x$; nous aurons $Y = \text{Log}\,(x+h) = \text{Log}\, x + y'h + \alpha h$; mais en faisant $h = xz$, le 1er. membre $= \text{Log}\, x + \text{Log}\,(1+z)$: donc

$$\text{L}\,(1+z) = y'xz + \alpha xz,\ \text{et}\ y' = \frac{M}{x},$$

M étant une constante inconnue, parce que $y'x$ doit être indépendant de x. Donc

$$y'' = -\frac{M}{x^2},\ y''' = \frac{2M}{x^3},\ y^{\text{IV}} = -\frac{2.3M}{x^4},\ \ldots$$

$$\text{Log}(x+h) = \text{Log}x + M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} \ldots\ldots \pm \frac{h^n}{nx^n} \ldots\right).$$

Transposant Log x, et faisant $h = zx$, il vient

$$\text{Log}\,(1+z) = M\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \ldots \pm \frac{z^n}{n} \ldots\right).$$

M dépend de la base des logarithmes qu'on considère, puisque sans cela, le nombre $1+z$ auroit le même logarithme dans tous les systêmes. Or, la base est telle que $M = 1$, quand $\log\,(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 \ldots$; d'où $\text{Log}\,(1+z) = M \times \log\,(1+z)$: ainsi (152), M est le *Module* du systême de logarithmes qui est employé ici. On retrouve donc la série C, n°. 576, d'où résulte la composition des tables de logarithmes.

La dérivée de Log z est de même $\dfrac{Mz'}{z}$ (633) : donc *la dérivée du logarithme d'une fonction est le produit du module par la dérivée de cette fonction, le tout divisé*

par la fonction (*). S'il est question de logarithmes népériens, cette règle devient plus simple, parce que le module est 1 (577).

Voici quelques applications de la règle précédente :

$$y = \log\left(\frac{u}{t}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ donne } y' = \frac{tu' - ut'}{ut}$$

$$y = \log(x^n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y' = \frac{nx^{n-1}}{x^n} = \frac{n}{x}$$

$$y = \log \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots y' = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

$$y = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \ldots\ldots\ldots y' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

$$y = \log \sqrt{\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)} \ldots\ldots y' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

$$y = \log \frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}} \ldots\ldots y' = \frac{-1}{x\sqrt{(1-x^2)}}$$

649. On facilite souvent le calcul des dérivations par l'usage des logarithmes : en voici divers exemples.

1°. Soit $y = utvz\ldots$,
on en tire $\log y = \log u + \log t + \log v + \log z$, et $\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{t'}{t} + \frac{v'}{v} + \frac{z'}{z} \ldots$; multipliant par y, on

(*) Nous avons préféré trouver directement les deux règles de la dérivation des exponentielles et des logarithmes; mais on auroit pu tirer l'une de l'autre. Ainsi $y = a^z$ donne $y' = a^z.z' \log a$, d'où $z' = \frac{y'}{a.\log a} = \frac{My'}{y}$, à cause du module $M = \frac{1}{\log a}$ (152). Réciproquement $z = \log y$ donne $z' = \frac{My'}{y}$, et $a^z = y$; d'où .... $y' = z'y \log a = a^z.z' \log a$. *Voyez* n°. 655.

reconnoît que la règle (630) s'étend à un nombre quelconque de facteurs.

2°. $y = z^t$ donne $\log y = t \log z$, $\frac{y'}{y} = \frac{tz'}{z} + t' \log z$:

donc $y' = z^t \left(\frac{tz'}{z} + t' \log z\right)$.

3°. De $y = a^{b^z}$, on tire $\log y = b^z \log a$, puis $y' = a^{b^z} b^z z' \log a \log b$.

4°. $y = z^{t^u}$ donne $\log y = t^u \log z$, d'où

$$\frac{y'}{y} = \frac{t^u z'}{z} + (t^u)' \log z;$$

puis $y' = z^{t^u} t^u \left\{\frac{z'}{z} + u' \log t \log z + \frac{ut' \log z}{t}\right\}$.

6. *Des Fonctions circulaires.*

650. Cherchons la dérivée de $y = \sin x$, le rayon étant 1.

On a $Y = \sin x \cos h + \cos x \sin h$.

Or il a été prouvé (579) que $\sin h = h + \ldots\ldots$, $\cos h = 1 + Mh^2 + \ldots$ Donc le coefficient de h est $y' = \cos x$.

De même si $y = \cos x$, on trouve $y' = -\sin x$.

Donc *la dérivée du sinus d'un arc est son cosinus, celle du cosinus est le sinus pris en signe contraire.*

Puisque les dérivées successives de $\sin x$ sont .... $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, ... et se reproduisent toujours dans le même ordre, en substituant dans la formule de Taylor, et faisant

$$P = h - \frac{h^3}{2.3} + \frac{h^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$Q = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

On trouve $\quad \sin(x+h) = Q\sin x + P\cos x$
$\qquad\qquad\quad \cos(x+h) = Q\cos x + P\sin x$

En éliminant P et Q, puis mettant dans leurs valeurs celles du sinus et du cosinus de $x+h$, on obtient $\sin h = P$ et $\cos h = Q$. On arrive ainsi aux séries données (579) ; de là résulte le rapport π du diamètre à la circonférence, et la formation des tables de sinus.

651. Voici plusieurs applications des règles ci-dessus.

1°. Soit $y = \frac{\sin x}{\cos x}$, d'où $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \text{séc}^2 x$.

Donc *la dérivée de la tangente d'un arc est le carré de sa sécante.* $y = \text{tang}\, z$, donne $y' = \frac{z'}{\cos^2 z}$.

2°. $y = \cot z$ donne $y' = -\frac{z'}{\sin^2 z}$.

3°. Puisque $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos\frac{1}{2}x$, la dérivée est $-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x$, ce qu'on peut aisément vérifier.

En général $y = \cos mz$ donne

$y' = -mz'.\sin mz$; et $y = \sin mz$ donne $y' = mz'.\cos mz$.

4°. De $y = \cos\log x$, on tire $y' = -\frac{\sin\log x}{x}$.

5°. Pour $y = \cos x^{\sin x}$, on a $\log y = \sin x.\log\cos x$, puis $y' = \cos x^{\sin x}\left(\cos x.\log\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$.

6°. $y = \frac{1}{\cos z}$ donne $y' = \frac{z'\,\text{tang}\, z}{\cos z}$; ainsi la dérivée de séc z est z' tang z séc z.

652. Jusqu'ici la variable principale x étoit un arc, et nous avons trouvé la dérivée de son sinus, cosinus,...;

mais si au contraire x désigne le sinus de l'arc y, ce qu'on écrit ainsi

$$y = \text{arc}\,(\sin = x) \quad \text{ou} \quad x = \sin y,$$

alors il s'agit de trouver la dérivée d'un arc dont le sinus est variable. Nous aurons pour celle de l'équation $x = \sin y$,

$$1 = y' \cos y, \text{ d'où } y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

On raisonnera de même pour avoir la dérivée de $y = \text{arc}\,(\cos = x)$, et on aura,

$$y = \text{arc}\,(\cos = x),\, y' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

On auroit aussi pu changer ci-dessus y en $100° - y$.

Prenons $y = \text{arc}\,(\text{tang} = x)$; et puisque x est la tangente de l'arc y, ou $x = \text{tang}\, y$, en prenant la dérivée, il vient $1 = \frac{y'}{\cos^2 y}$, d'où $y' = \cos^2 y$, et enfin

$$y' = \frac{1}{\text{séc}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Concluons de là que 1°. *la dérivée d'un arc exprimé par son sinus est l'unité divisée par le cosinus*; 2°. *celle de l'arc exprimé par son cosinus est moins l'unité divisée par le sinus*; 3°. *enfin celle de l'arc exprimé par sa tangente est l'unité divisée par le carré de la sécante.*

Le rayon est $= 1$; mais s'il étoit $= r$, il seroit facile d'obtenir les dérivées en rendant les formules homogènes (328). Ainsi

$$y = \text{tang}\, z,\; y = \text{arc}\,(\sin = z),\; y = \text{arc}\,(\text{tang} = z)$$

donnent $y' = \frac{r^2 z'}{\cos^2 z}$, $y' = \frac{rz'}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$, $y' = \frac{r^2 z'}{r^2 + z^2}$.

7. *Changement de la Variable Indépendante.*

653. Lorsqu'on soumet les conditions d'une question à l'analyse différentielle, on est conduit à des relations entre les variables et leurs dérivées $x, y, y', y''\ldots$; et les formules qu'on obtient ainsi, ne peuvent devenir applicables à une fonction de x déterminée, $y = Fx$, qu'autant qu'on y met pour $y', y''\ldots$ leurs valeurs en x et y. Soit donc

$$\psi(x, y, y', y'', \ldots)$$

la fonction qu'il s'agit d'évaluer en x et y. Cela n'auroit aucune difficulté, d'après les règles données précédemment, si on connoissoit la relation $y = Fx$ qui lie y à x. Or il arrive souvent qu'on donne au lieu de cela les équations

$$y = \varphi t \text{ et } x = ft,$$

qui lient y et x à une 3e. variable t. Il faudroit donc éliminer t entre elles, puis en déduire $y'\,y''\ldots\ldots$ en x et y. Mais outre que ces calculs seroient ordinairement très-pénibles, ils cessent même d'être possibles dans plusieurs cas, comme, par exemple, lorsqu'au lieu de connoître $x = ft$, on a la dérivée $x' = f't$.

Proposons-nous donc de chercher les altérations qu'on doit faire subir à la fonction ψ, pour que les dérivées soient prises, non plus relativement à x, mais à t, considéré comme *Variable Indépendante*.

Soient h k et i les accroissemens que prennent ensemble les variables x, y et t.

$$y = Fx \text{ donne } k = (y')\,h + (y'')\,\frac{h^2}{2} + \text{etc.} \qquad (1)$$

$$y = \varphi t \text{ donne } k = y'\,i + y''\,\frac{i^2}{2} + \text{etc.} \qquad (2)$$

$$x = ft \text{ donne } h = x'\,i + x''\,\frac{i^2}{2} + \text{etc.} \qquad (3)$$

Les dérivées indiquées ici se rapportent à la variable désignée sous le signe F, φ ou f. On devra donc distinguer par la suite y' ou $\frac{dy}{dt}$, de (y') ou $\frac{dy}{dx}$; l'une est la dérivée de φt, relative à t sans avoir égard à x ni y; celle de Fx est (y'). La fonction proposée ψ est par conséquent formée en (y') (y'')....... et on veut la traduire en y' y''..... x' x''.....

En égalant les valeurs 1 et 2 de k, puis mettant pour h le développement 3, on trouve, en se bornant aux deux premières puissances de h,

$$(y')\,x'i + \{(y')\,x'' + (y'')\,x'^2\}\frac{i^2}{2} + \ldots = y'i + \frac{y''i^2}{2} + \ldots$$

et, comme l'un quelconque des accroissemens est arbitraire, cette équation a lieu quel que soit i, d'où

$$(y')\,x' = y', \quad (y')\,x'' + (y'')\,x'^2 = y'', \ldots\ldots$$

donc les valeurs qu'on doit substituer à (y') (y'') dans la fonction ψ, sont

$$(y') = \frac{y'}{x'}, \quad (y'') = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}, \ldots \quad (D)$$

On pourroit trouver de même (y''').... mais le 1er. de ces résultats suffit pour en déduire tous les autres. En effet, on voit que (y'), ou la dérivée de $y = Fx$, est $= \frac{y'}{x'}$, ou le quotient des dérivées relatives à t tirées de φt et ft. Or, $(y') = F_1 x$ peut à son tour être regardée comme une fonction de t, telle que $\varphi_1 t$, en sorte qu'on auroit les relations

$$(y') = F_1 x, \quad (y') = \varphi_1 t, \quad x = ft$$

pour lesquelles on pourroit raisonner de la même ma-

nière. On voit donc que (y'') doit être le quotient des dérivées de $\varphi_1 t$ et ft relatives à t; or, celle de $\varphi_1 t$ ou $\frac{y'}{x'}$, est (632), $\frac{x'y''-y'x''}{x'^2}$; donc, on trouve la même valeur que ci-dessus pour (y''). Pareillement la dérivée de cette valeur de (y'') étant divisée par x' donne

$$y'''=\frac{y'''}{x'^3}-\frac{3x''y''}{x'^4}-y'\left(\frac{x'''}{x'^4}-\frac{3x''^2}{x'^5}\right), \quad (E)$$

et ainsi des autres. On voit donc qu'on peut faire usage de la fonction ψ de trois manières.

1°. En éliminant t entre $y=\varphi t$, $x=ft$, puis tirant y' y''..... de l'équation résultante $y=Fx$: ce calcul se fait rarement.

2°. En remplaçant y' y''.... par leurs valeurs $D,E,$... et substituant ensuite les dérivées relatives à t tirées de $y=\varphi t$, $x=ft$.

3°. Enfin, en formant simplement en fonction de t la valeur de (y') ou $\frac{y'}{x'}$, puis prenant les dérivées de l'expression qui en résulte, et divisant chaque fois par x'.

Soient, par exemple, les trois fonctions

$$\frac{y}{(y')},\ y\,(y'),\ \frac{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}}{(y'')}.$$

(Ce sont les valeurs générales de la sous-tangente, de la sous-normale et du rayon de courbure, les coordonnées étant rectangulaires (678) et la courbe quelconque). En substituant pour (y') et (y'') leurs valeurs, on trouve

$$\frac{yx'}{y'}\ \frac{yy'}{x'}\ \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''},$$

expressions où il n'entre plus que des dérivées relatives

à une troisième variable quelconque t, et qu'on devra tirer de $y=\varphi t$, $x=ft$.

654. Lorsque la fonction ψ a reçu ces modifications, il est très-facile de revenir sur ses pas et de la rétablir dans son état primitif, où x étoit variable indépendante ; car il suffit de faire $x'=1$, d'où $x''=0$, $x'''=0$, ...

Cela suit de ce que $(y')=\frac{y'}{x'}$ devient alors $(y')=y'$, et de ce que, d'après les règles ordinaires de la dérivation, on déduit (y'')......... de (y'). On verra, par exemple, que $x'=1$ remet les valeurs ci-dessus sous leur forme primitive.

Quand on a généralisé la fonction ψ, et qu'elle convient à toute variable principale t, elle ne renferme plus de traces de ce que x l'étoit d'abord ; en sorte qu'on pourroit la regarder comme provenue d'une autre fonction où s étoit variable indépendante : et, puisque $x'=0$ la rend propre au cas où x est variable principale, $t'=0$ établira la même chose pour t. C'est ce qu'on exprime en *disant que la différentielle de* t *est constante*. De même on dit aussi qu'*aucune différentielle n'est constante* dans la fonction ψ, lorsqu'elle est généralisée de manière à convenir à toute variable principale.

En remontant au développement de h, on voit que x' est la dérivée de ft ; ainsi par $x'=0$, il faut entendre $\frac{dx}{dt}=0$; la *dérivée de* x *relativement à une* 3me. *variable quelconque* t *est donc nulle*. Il faut en dire autant lorsqu'on pose $t'=0$; pour exprimer que t devient variable principale.

Voici l'usage de ce théorème. Si, au lieu de connoître la relation $x=ft$, on a seulement sa dérivée $x'=f't$, on fera tout aussi aisément subir à la fonc-

tion ψ les modifications convenables, puisque (y') (y'')... ne contiennent pas x, mais seulement x', x''...... Il n'en seroit pas de même, si au lieu de $x'=f't$, on donnoit une équation dérivée entre x et t, où x fût prise pour variable principale, telle que $f(t,t',x)=0$. Alors il faudroit traduire cette équation en une autre où les dérivées de x et de t ne fussent pas constantes, puis faire $t'=1$. La valeur de x' qu'on obtiendroit ainsi, seroit $f't$ ou $\frac{dx}{dt}$.

Par exemple, dans $\psi=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, la variable principale est x; si on veut que ce soit t qui remplisse cette condition, afin de rendre la valeur de ψ propre au cas où, au lieu de donner $y=Fx$, on donneroit $y=\varphi t$, la variable t étant telle que $y=t'$: on rendra ces deux relations plus générales en mettant $\frac{t'}{x'}$ pour t', $\frac{y'}{x'}$ pour y', etc.; on aura

$$y=\frac{t'}{x'},\quad \psi=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}.$$

Comme maintenant on peut prendre telle variable principale qu'on veut, on fera $t'=1$, $t''=0$,.... ou

$$x'=\frac{1}{y}\quad x''=-\frac{y'}{y^2},\ \text{d'où}\ \psi=\frac{(1+y^2y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y(yy''+y'^2)};$$

ensuite on tirera de $y=\varphi t$ les valeurs de y y' y'' relatives à t, et on aura celle de ψ.

(Cette valeur de ψ et la suivante sont celles du rayon de courbure d'une courbe quelconque, lorsque la différentielle de l'aire ou celle de l'arc est constante. *Voy.* nos. 681 et 682).

Pareillement si t et y sont liés par l'équation $t'^2=1+y'^2$ on changera cette relation en $t'^2=x'^2+y'^2$; puis posant $t'=1$, on aura

$$x'^2+y'^2=1\text{, d'où } x'x''+y'y''=0 \text{ et } \psi=\frac{x'}{y''}=-\frac{y'}{x''},$$

en éliminant x'' ou y''. Il faudra tirer de $y=\varphi t$ les dérivées $y'\ y''$ relatives à t, puis $x'=\sqrt{(1-y'^2)}$ et substituer; on aura ψ en fonction de t.

On verra de même que la formule $\frac{y'''}{xy''}$, où x' est constant, pour que t' le soit, en supposant $t'^2=1+y'^2$, devient $\frac{1}{x}\left(\frac{y'''}{x'y''}+\frac{4y'y''}{x'^3}\right)$.

655. On peut présenter d'une manière plus simple, à l'aide de ces principes, quelques-unes des règles de la dérivation. Supposons que connoissant la relation $y=fx$ et ses dérivées, x étant variable principale, on veuille trouver celle de $x=\varphi y$ relatives à y, sans résoudre l'équation proposée $y=fx$. En faisant $y'=1$, $y''=0$,..... dans les formules D, on verra qu'il suffit pour cela de changer y' en $\frac{1}{x'}$, y'' en $-\frac{x''}{x'^3}$.... dans les dérivées de $y=fx$ (*).

(*) C'est au reste ce qui est facile à démontrer directement. Car soient h et k les accroissemens de x et y

$$y=fx \text{ donne } k=y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\text{etc.}$$
$$x=\varphi y \text{ donne } h=x'k+\tfrac{1}{2}x''k^2+\text{etc.}$$

Cette valeur de k substituée dans celle de h, donne

$$h=x'y'h+(x'y''+x''y'^2)\tfrac{1}{2}h^2+\text{etc.}$$

et comparant les deux membres terme à terme

$$x'y'=1,\quad x'y''+x''y'^2=0\ldots\ldots$$

d'où on tire pour y', y''..... les valeurs désignées.

Ainsi $y=a^x$ a donné $y'=a^x \log a$; donc $\frac{1}{x'}=a^x \log a$, et comme x est le logarithme de y et $\frac{1}{\log a}$ le module M ; la dérivée de ce logarithme est $x'=\frac{M}{y}$, comme on le sait déja (648).

$y=\sin x$ donne $y'=\cos x$, qu'on change en....... $\frac{1}{x'}=\cos x$: on a donc pour la dérivée de $x=\text{arc}\,(\sin=y)$, $x'=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$, comme on l'a vu (652).

Enfin de $y=\text{tang}\,x$, on tire $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{x'}$, d'où $x'=\cos^2 x=\frac{1}{\text{séc}^2 x}=\frac{1}{1+y^2}$; c'est la dérivée de....... $x=\text{arc}\,(\text{tang}=y)$.

656. Pour généraliser une fonction qui contient des dérivées du 1er. ordre, il suffit de changer (y') en $\frac{y'}{x'}$: exprimons ce théorême par la notation de Leibnitz, nous aurons

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt} \text{ ou } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx},$$

en supprimant le diviseur dt, ce qu'on est en droit de faire, pourvu que dans le 2e. membre on se ressouvienne de prendre les différentielles relativement à t. Donc *lorsqu'on veut changer de variable principale dans une fonction dont les dérivées ne sont que du premier ordre et exprimées par la notation de Leibnitz, on ne doit faire éprouver aucune altération à cette fonction ; et on regardera seulement les différentielles qui y entrent comme relatives à la nouvelle variable principale.*

Ainsi $y = \tang z$ a donné $dy = \frac{dz}{\cos^2 z}$, d'où........ $dz = dy \cos^2 z = \frac{dy}{\sec^2 z}$; donc la différentielle de l'arc z, dont la tangente est y, est $= \frac{dy}{1+y^2}$, puisque sa sécante est $\sqrt{(1+y^2)}$.

C'est pour cela qu'on préfère la notation de Leibnitz dans tout le calcul intégral, où on se propose de remonter de la dérivée à la fonction primitive : comme on n'y parvient qu'à l'aide de transformations souvent laborieuses, il seroit bien plus pénible encore d'avoir égard dans le calcul à tous les changemens de variables indépendantes.

Au reste, l'avantage que présente la notation de Leibnitz, n'a lieu que pour le premier ordre ; car en traduisant la formule D en

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}$$

où les différentielles dx dy..... sont relatives à t, on ne retrouve plus la même expression pour les deux membres.

Il suit d'ailleurs des principes mêmes qui nous ont conduits à ces résultats, que $\frac{d^2y}{dx^2}$ se trouve être la dérivée de $\frac{dy}{dx}$ divisée par dx, en regardant dy et dx comme des fonctions de t. La dérivée de $\frac{dy}{dx}$ s'obtient en suivant la règle des fractions (632) : en sorte qu'on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}, \ldots.$$

8. *Des Cas où la Série de Taylor est en défaut.*

657. La formule de Taylor peut cesser d'avoir lieu quand on attribue à x une valeur particulière a : en effet alors $f(x+h)$ ne contient plus d'autre variable que h, et on sait qu'une telle fonction n'est pas toujours développable suivant les puissances entières et positives de h : ainsi $\cot h$, $\log h$, ... étant infinies lorsque $h=0$, leurs développemens doivent comprendre des puissances négatives de h. Il est d'ailleurs facile de voir qu'en faisant $x=a$ dans $f(x+h)$, c'est-à-dire en mettant $a+h$ pour x dans fx ; si x est engagé sous des radicaux, il pourra arriver que les constantes a se détruisent ; alors h restant sous le radical, le développement renfermera des puissances fractionnaires de h.

Ainsi $\sqrt{x}+\sqrt[3]{(x-a)^4}$ devient $\sqrt{(a+h)}+\sqrt[3]{h^4}$, ou $\sqrt{a}+\dfrac{h}{2\sqrt{a}}+h^{\frac{4}{3}}-\dfrac{h^2}{8\sqrt{a^3}}+\ldots\ldots$

De même $\dfrac{1}{(x-a)^2}+\sqrt{x}$ donne $\dfrac{1}{h^2}+\sqrt{(a+h)}\ldots\ldots$ ou $h^{-2}+\sqrt{a}+\ldots\ldots$

Enfin $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)}}+\sqrt{x}$ donne $h^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{a}+\ldots\ldots$

Jusqu'ici nous avons considéré les fonctions d'une manière générale, et x n'ayant pas pris une valeur plutôt qu'une autre, les calculs et les procédés que nous avons établis n'ont pas présenté de cas d'exception. Mais bientôt nous appliquerons ces principes à des cas particuliers, où x recevra des valeurs déterminées ; il est donc intéressant de savoir reconnoître les cas où la valeur a mise pour x rend le théorème de Taylor en défaut.

En ordonnant suivant h le développement de $f(a+h)$, qui est supposé contenir des puissances de h qui ne sont pas entières et positives, et désignant par m la plus petite de ces puissances comprise entre les entiers l et $l+1$, on aura

$$f(a+h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\ldots+Lh^l+Mh^m+\ldots$$

$A\ B\ C\ldots.\ L\ M\ldots.$ sont des constantes *finies* qui dépendent de a. Si m étoit négatif, Mh^m seroit le premier terme de la série, ou plutôt on auroit, $A=B\ldots=L=0$.

Puisque cette équation subsiste quel que soit h, prenons les dérivées successives relativement à h; nous aurons

$$f'(a+h)=B+2Ch+3Dh^2\ldots+lLh^{l-1}+mMh^{m-1}\ldots.$$

$$f''(a+h)=2C+2.3Dh+\ldots l(l-1)Lh^{l-2}+m(m-1)Mh^{m-2}.$$

$$f'''(a+h)=2.3\,D+\ldots+l(l-1)(l-2)Lh^{l-3}+\ldots\ \text{etc}\ldots$$

En faisant $h=0$, on trouve

$$A=fa,\ B=f'a,\ C=\tfrac{1}{2}f''a,\ D=\tfrac{1}{6}f'''a,\ \ldots..$$

en sorte que les coefficiens $A\ B\ldots.\ L$ sont les valeurs de $y'\ y''\ldots.\ y^{(l)}$ lorsqu'on y fait $x=a$, et dont aucune n'est infinie : à chaque dérivation, le 1er. terme disparoît, parce qu'il est constant, et à la l^e. opération, on trouve L; mais à la $(l+1)^e$, on a

$$f^{(l+1)}(a+h)=m.m-1\ldots.\ Mh^{m-l-1}+\ldots.$$

qui, lorsque $h=0$ devient $f^{(l+1)}a=\infty$.

Ainsi toutes les dérivées à partir de $y^{(l+1)}$ sont infinies, parce que h y conserve un exposant négatif. Concluons de là que,

1°. Si la valeur $x=0$ ne rend infinie aucune des fonctions $y\ y'\ y''\ \ldots\ldots$ le développement de Taylor n'est pas en défaut, ce qui est d'accord avec ce que nous avons dit lors de la démonstration de cette formule (644).

2°. Si y est infini, y' y''.... le sont aussi, et il y a des puissances négatives pour h.

3°. *Si l'une des fonctions* y y' y''.... *devient infinie, toutes les suivantes le sont aussi; le théorème de Taylor n'est fautif qu'à partir du terme qui contient cette fonction*, et on peut l'employer à la recherche des termes qui précèdent celui-ci.

658. Pour trouver le développement qui doit remplacer la partie fautive, il faut en général changer x en $a+h$ dans fx, où seulement dans la somme S (646) des termes en défaut, puis on développe suivant les puissances de h en recourant aux séries connues.

Par exemple, $y = c + (x-b)\sqrt{(x-a)}$

donne. . . . . $y' = \dfrac{3x-2a-b}{2\sqrt{(x-a)}}$;

or $x=a$ rend y' infini; donc y'' y'''... le sont aussi, et le développement de $f(a+h)$ doit avoir pour h un exposant entre 0 et 1 : le 1er. terme est $y=c$.

C'est ce qu'on vérifie en cherchant ce développement : on fera $x=a+h$ dans y, et on aura

$$Y = c + (a-b)\,h^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{3}{2}}.$$

Soit encore $y = c + x + (x-b)(x-a)^{\frac{3}{2}}$;

d'où . . . . . . $y' = 1 + (x-a)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(x-b)\sqrt{(x-a)}$

$$y'' = 3\sqrt{(x-a)} + \frac{3(x-b)}{4\sqrt{(x-a)}}, \text{ etc.}$$

$x=a$ donne $y=c+a$, $y'=1$; les autres dérivées sont infinies; ainsi le développement de Y, commence par $(c+a)+h$, et les autres termes ne procèdent plus suivant les puissances 2,3... de h.

En effet, mettons $a+h$ pour x, et y deviendra

$$Y = (c+a) + h + (a-b)\,h^{\frac{3}{2}} + h^{\frac{5}{2}}.$$

Si la somme S des termes qui échappent à la série de Taylor, ne peut être développée par cette voie, on lui fera subir une transformation qui permette d'appliquer la formule de Maclaurin (666). Au reste, le procédé suivant est général.

Soit S la fonction de h qu'on veut développer, A la valeur qu'elle prend lorsque $h=0$, on fera $S=A+Mh^m$, m étant la plus haute puissance de h qui divise $S-A$, afin que le quotient M ne soit ni o, ni ∞, lorsque $h=0$. Une fois A M et m connus, on posera $M=B+Nh^n$, et on déterminera de même B N et n, puis on fera $N=C+Ph^p$; et ainsi de suite. Donc

$$S=A+Bh^m+Ch^{m+n}+Dh^{m+n+p}+\ldots$$

Si S doit renfermer des puissances négatives de h, on mettra $\frac{1}{h}$ pour h, puis dans le développement, on changera les signes des exposans de h (Voy. pour les applications, les *Fonct. analy.*, n°s. 11 et 120).

659. Examinons ce qui arrive lorsque la supposition de $x=a$ fait disparoître de fx, un terme de la forme PQ^m, P et Q étant des fonctions de x.

Ier. *cas*. Si $x=a$ donne $Q=0$; la fonction Q prend dans les dérivées successives les exposans $m-1$, $m-2$..., (635). Nous distinguerons ce qui arrive suivant que m est entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

1°. Si m est entier et positif, la m^e. dérivée contient un terme P dégagé du facteur Q, en sorte que $x=a$, chasse P et Q des $(m+1)$ premiers termes du développement; P reste dans tous les suivans. Le théorème de Taylor n'est pas pour cela en défaut, et il n'en résulte aucune circonstance remarquable. $y=(x-b)(x-a)^2-ax^2$ donne

$$Y=-a^3-2a^2h-bh^2+h^3.$$

2°. Si m est négatif, PQ^m et ses dérivées sont infinies, parce qu'elles ont toutes des termes de la forme $\frac{P}{Q^k}$; le développement de Taylor est fautif, dès le 1er. terme, et on doit obtenir des puissances négatives de h. C'est ce qui arrive pour $y=\frac{x^2}{x-a}$ et $y=\frac{1}{\sqrt{(x^2-ax)}}$: on trouve

Pour la 1re. $Y=a^2h^{-1}+2a+h$.

Pour la 2e. $Y=\frac{1}{a}\left(\frac{h}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2a}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8a}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\ldots$

3°. Si m est positif et fractionnaire, compris entre l et $l+1$, $x=a$ fait disparoître Q de toutes les dérivées; et comme celle de l'ordre $l+1$, a pour exposant de Q dans l'un de ses termes $m-(l+1)$, elle devient infinie, ainsi que les suivantes. Le théorême de Taylor cesse donc d'avoir lieu au terme de l'ordre $l+1$, c.-à-d. que h doit prendre un exposant fractionnaire entre l et $l+1$.

C'est ce qu'il eût été facile de prévoir, puisque le radical disparoissant du développement de $f(a+h)$, tandis qu'il demeure visiblement dans le 1er. membre, celui-ci auroit plus de valeurs que le 2e., si h ne prenoit ce même radical. Ainsi $y=x^3+(x-b)(x-a)^{\frac{5}{2}}$ donne

$$Y=a^3+3a^2h+3ah^2+(a-b)h^{\frac{5}{2}}+h^3+h^{\frac{7}{2}}.$$

Voyez aussi les exemples des nos. 657 et 658.

Le développement de $(x+h)^m$ n'est jamais fautif, quels que soient x, h et m; car la dérivée de l'ordre n étant $m.(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$, n'est jamais infinie (si ce n'est pour $x=0$, lorsque m n'est pas entier et positif). On en dira autant des séries produites par a^x, $\log(1+x)$, $\sin x$ et $\cos x$.

660. IIe. *cas*. Si $x=a$, donne $P=0$, P est de la forme $(x-a)^l$: nous prendrons ici l entier et positif, puisque sans cela on retomberoit sur le 1er. cas. Alors $(x-a)^l Q^m$ perd la fonction Q, ainsi que ses $(l-1)$ premières dérivées ; mais elle reparoît dans la l^e (*voy*. 1er. cas, 1°.) : le développement de Taylor n'est pas en défaut. On en trouve des exemples, en faisant $x=b$, n°. 658 et ci-dessus.

Pour $y=(x-a)^4\sqrt{x}$, $x=a$ fait disparoître $\sqrt{x}$ dans les trois 1res. dérivées ; mais ce radical reste dans la 4e. et les suivantes.

1°. Supposons que $x=a$ fasse disparoître un radical dans y, lequel subsiste dans y', c.-à-d. que ce radical n'ait $x-a$ pour facteur qu'à la 1re. puissance. Alors pour $x=a$, y' aura un plus grand nombre de valeurs que y, à raison du radical qui existe dans y' et n'entre pas dans y. Chassons ce radical de l'équation $y=fx$ par l'élévation aux puissances, et soit $z=0$ l'équation implicite en x et y qui en résultera. Sa dérivée sera

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}y'=0;$$

or, il doit y avoir au moins deux valeurs i et k de y' contre une seule de y, pour $x=a$, ainsi que pour $\frac{dz}{dx}=A$, $\frac{dz}{dy}=B$; donc

$$A+Bi=0,\quad A+Bk=0,\quad \text{et } B(i-k)=0;$$

d'où $B=0$, et $A=0$. Ainsi, l'hypothèse de $x=a$ doit à elle seule satisfaire à l'équation dérivée, indépendamment de toute valeur de y'. D'où

$$\frac{dz}{dx}=0,\quad \frac{dz}{dy}=0,\quad \text{et } y'=\frac{0}{0}.$$

Puisque y' n'est pas donné par cette dérivée, il faut

recourir à celle du 2e. ordre qui a la forme (641)

$$\frac{dz}{dy}y'' + My'^2 + 2Ny' + L = 0.$$

Les coefficiens étant des fonctions de x et y sans radicaux. Le 1er. terme disparoît, et on a $My'^2 + 2Ny' + L = 0$; d'où on tirera les deux valeurs des y' qui répondent à $x = a$. Et s'il y avoit plus de deux valeurs de y', on verroit de même que M, N et L doivent être nuls; et on devroit recourir à la dérivée du 3e. ordre, d'où y''' et y'' disparoîtroient, parce que leurs coefficiens seroient $\frac{dz}{dy}$, et $3(My' + N)$ qui sont nuls : y' entreroit au cube dans cette dérivée.

En général, on devra recourir à une dérivée du même ordre que le radical détruit par $x = a$.

Soit par exemple $y = x + (x - a)\sqrt{(x - b)}$,

d'où. . . $y' = 1 + \sqrt{(x - b)} + \frac{x - a}{2\sqrt{(x - b)}}$,

$x = a$ donne $y = a$, $y' = 1 \pm \sqrt{(a - b)}$. Or, la proposée revient à

$$(y - x)^2 = (x - a)^2(x - b);$$

d'où $y' = 1 + \frac{(x - a)(3x - 2b - a)}{2(y - x)}$,

valeur qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x = y = a$.

La dérivée du 2e. ordre est

$$(y - x)y'' + (y' - 1)^2 = 3x - 2a - b,$$

qui devient $(y' - 1)^2 = a - b$, d'où on tire comme ci-dessus $y' = 1 \pm \sqrt{(a - b)}$.

De même $y = (x - a)(x - b)^{\frac{1}{3}}$ donne $y = 0$ et. . . $y' = \sqrt[3]{(a - b)}$, lorsque $= a$. Mais si on chasse le

radical, et qu'on prenne les dérivées des trois 1ers. ordres, on trouve

$$y^3 = (x-a)^3(x-b)$$
$$3y^2y' = (x-a)^2(4x-3b-a)$$
$$y^2y'' + 2yy'^2 = 2(x-a)(2x-a-b)$$
$$y^2y''' + 6yy'y'' + 2y'^3 = 8x - 6a - 2b$$

$x = a$ et $y = 0$ satisfont aux trois premières équations, et la 4e. donne pour y' la même valeur, $\sqrt{(a-b)}$.

2°. Si le radical disparoît dans y et y', et reste dans y'', ce qui arrive lorsque $(x-a)^2$ en est facteur, y et y' auront un nombre égal de valeurs, mais y'' en aura davantage, lorsqu'on fera $x = a$. Si donc on fait évanouir le radical de $y = fx$, et qu'on cherche y'' à l'aide de la dérivée du second ordre de $z = 0$, elle devra être satisfaite d'elle-même et donner $y'' = \frac{0}{0}$. Pour avoir les valeurs de y'', il faudra passer aux dérivées d'ordres supérieurs.

On raisonnera de même lorsque $(x-a)^3$, $(x-a)^4$,... seront facteurs d'un radical.

Soit, par exemple, $y = x + (x-a)^2\sqrt{x}$; on trouvera pour $x = a$, que $y = a$, $y' = 1$, $y'' = \pm 2\sqrt{a}$. Mais si on met la proposée sous la forme

$$(y-x)^2 = (x-a)^4 x$$

D'où
$$2(y-x)(y'-1) = (x-a)^3(5x-a)$$
$$(y-x)y'' + (y'-1)^2 = 2(x-a)^2(5x-2a)$$
$$(y-x)y''' + 3(y'-1)y'' = 6(x-a)(5x-3a)$$
$$(y-x\ y^{IV} + 4y'''(y'-1) + 3y''^2 = 12(5x-4a)$$

en faisant $x = a$, on trouve $y = a$: dans la dérivée du 1er. ordre tout se détruit, celle du 2e. donne $y' = 1$; tout se détruit encore dans la suivante, et $y'' = \frac{0}{0}$; enfin la dernière donne $y'' = \pm 2\sqrt{a}$.

9. *Limites de la Formule de Taylor.*

661. Supposons que x ait reçu une valeur particulière a, et prenons la dérivée de $f(x+h)$ (*); faisons y varier h depuis zéro, jusqu'à une valeur donnée b, en admettant que, dans l'intervalle de a à $a+b$, $f'(x+h)$ ne soit pas infinie. Soient p et q les valeurs de $x+h$ pour lesquelles $f'(x+h)$ devient la plus petite et la plus grande dans cette étendue; on aura $f'p < f'(x+h)$, et $f'q > f'(x+h)$; ainsi les quantités

$$f'(x+h) - f'p, \text{ et } f'q - f'(x+h)$$

seront positives dans tout l'intervalle, depuis $x+h=a$, jusqu'à $x+h=a+b$.

Cela posé, ces deux fonctions sont les dérivées relatives à h de

$$f(x+h) - y - hf'p, \text{ et } hf'q - f(x+h) + y,$$

qui sont nulles lorsque $h=0$. Or, il suit de ce qui a été dit (627) que puisque les dérivées sont positives dans toute l'étendue qu'on considère, les fonctions primitives le sont aussi. Donc

$$f(x+h) \text{ est } > y + hf'p, \text{ et } < y + hf'q;$$

ce seroit le contraire, si h étoit négatif. Donc, si on ne prend que le 1er. terme y du développement de Taylor, la somme des autres termes est comprise entre $hf'p$ et $hf'q$.

(*) Faisons $x+h=z$, et prenons les dérivées successives de fz, elles seront (633) de la forme $f^{(m)}z$, par rapport à x, aussi bien que relativement à h. Donc les dérivées de $f(x+h)$ sont les mêmes, soit qu'on regarde x ou h comme variable.

Les deux 1ers. termes étant $y + y'h$; soient p et q les valeurs de $x + h$ qui rendent $f''(x + h)$ la plus petite et la plus grande dans la même étendue; on aura de même les quantités

$$f''(x + h) - f''p \quad \text{et} \quad f''q - f''(x + h)$$

sans cesse positives depuis $x + h = a$ jusqu'à $a + b$. Mais elles sont les dérivées relatives à h, de

$$f'(x + h) - y' - hf''p \quad \text{et} \quad hf''q - f'(x + h) + y'$$

qui sont nulles lorsque $h = 0$. Donc, dans toute l'étendue h, si $f''p$ et $f''q$ ne sont pas infinies, nos dérivées étant positives, ces trinomes le sont également, ainsi que

$$f(x+h) - y - hy' - \tfrac{1}{2}h^2f''p \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}h^2f''q - f(x+h) + y + hy',$$

puisque les précédentes sont leurs dérivées et qu'elles sont nulles quand $h = 0$. Donc on a

$$f(x+h) > y + hy' + \tfrac{1}{2}h^2f''p \quad \text{et} \quad < y + hy' + \tfrac{1}{2}h^2f''q.$$

Ce seroit le contraire si h étoit négatif. Il en résulte que si on prend pour p et q les valeurs qui rendent $f''(x+h)$ la plus petite et la plus grande, sans être infinies, depuis $x + h = a$, jusqu'à $a + b$, la somme des termes qui doivent être ajoutés à $y + y'h$ est comprise entre $\frac{1}{2}h^2f''p$ et $\frac{1}{2}h^2f''q$.

On continuera ce raisonnement aussi loin qu'on voudra, et on verra qu'en général si le développement de Taylor est poussé jusqu'au terme h^{n-1}, la somme des autres termes a pour limites les valeurs qu'on obtient en prenant le terme suivant $\dfrac{h^n(y^n)}{2.3\ldots n}$, et mettant à la place de $y^{(n)}$ la plus grande et la plus petite valeur de $f^{(n)}(x + h)$,

lorsqu'on fait varier h depuis zéro, ou bien des quantités plus grandes que l'une et plus petites que l'autre (*).

On verra aisément que y' est négatif lorsque x croissant fx décroît. Si l'une de ces valeurs est infinie, alors la limite correspondante n'existe pas; le théorême de Taylor est en défaut, puisque $f^{(n)}(x+h)$ est infini dans quelque partie. Alors il faut arrêter ce développement à l'un des termes qui précèdent celui qui est fautif.

On a vu (638) que $y = x^m$ donne $y^{(n)} = Mx^{m-n}$, en faisant pour abréger, $M = m(m-1)\ldots(m-n+1)$; et le terme général de $(x+h)^m$ est $\frac{Mh^n}{2.3\ldots n}x^{m-n}$. Pour obtenir les limites de la somme des termes, qui suivent celui dont le rang est n, mettons pour Mx^{m-n} la plus grande et la plus petite valeur de $f^{(n)}(x+h)$ ou de $M(x+h)^{m-n}$: l'une répond visiblement à h, l'autre à $h=0$; ainsi ces limites sont

$$\frac{Mh^n(x+h)^{m-n}}{2.3\ldots n}, \text{ et } \frac{Mh^n x^{m-n}}{2.3\ldots n}.$$

De même pour $y = a^x$, on a $y^{(n)} = a^x.\log^n a$; la plus grande et la plus petite valeur de $a^{x+h}.\log^n a$, répondent aussi à h et à zéro. Donc les limites du développement de a^{x+h} sont

$$\frac{h^n a^{x+h}\log^n a}{2.3\ldots n} \text{ et } \frac{h^n a^x \log^n a}{2.3\ldots n};$$

celles de a^h sont $\frac{h^n a^h \log^n a}{2.3\ldots n}$ et $\frac{h^n \log^n a}{2.3\ldots n}$.

(*) On doit toujours entendre par quantités plus grandes et plus petites, celles qui sont plus avancées vers l'infini positif ou vers l'infini négatif. C'est dans ce sens que si $a > b$, on a $-a < -b$. V. nº. 219.

Pour log $(x+h)$ les limites sont

$$\pm \frac{h^n}{n(x+h)^n} \text{ et } \pm \frac{h^n}{nx^n}.$$

662. Le théorême que nous venons d'exposer, non seulement démontre de nouveau la Série de Taylor, mais encore prouve que la somme de ceux qui suivent h^{n-1} étant comprise entre

$$\frac{h^n}{2.3\ldots n} f^{(n)} p \text{ et } \frac{h^n}{2.3\ldots n} f^{(n)} q,$$

on peut la représenter par $\frac{h^n}{2.3\ldots n} f^{(n)}(x+j)$,....

$x+j$ étant un nombre compris entre p et q. Par là, on donne à la série la forme finie

$$f(x+h)=y+y'h+y''\frac{h^2}{2}+\ldots+y^{(n-1)}\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots n-1}+\frac{h^n}{2.3\ldots n}f^{(n)}(x+j)$$

x et j désignant d'ailleurs des nombres déterminés. L'avant-dernier terme surpassera le dernier, si on a

$$y^{(n-1)} > \frac{h}{n} f^{(n)}(x+j);$$

et comme la seconde partie croît avec h, à partir de zéro, *on peut toujours prendre* h *assez petit pour qu'un terme quelconque de la Série de Taylor surpasse la somme de tous ceux qui le suivent, et cela aura également lieu pour toute valeur de* h *plus petite que celle-ci.*

10. *Développement des Fonctions de plusieurs variables.*

663. Soit z une fonction de deux variables indépendantes x et y, ou $z=f(x,y)$, proposons-nous de changer x en $x+h$ et y en $y+k$, h et k étant des quantités arbitraires, et de développer la fonction résultante $f(x+h, y+k)$ suivant les puissances de h et

de k. Pour cela, au lieu de faire à la fois cette double opération, mettons d'abord $x+h$ pour x, sans changer y; z deviendra

$$f(x+h,y)=z+\frac{dz}{dx}.h+\frac{d^2z}{dx^2}.\frac{h^2}{2}+\frac{d^3z}{dx^3}.\frac{h^3}{2.3}+\text{etc.}$$

Dans ce résultat, mettons partout $y+k$ pour y, sans faire éprouver de variation à x. Et d'abord le 1er terme z deviendra

$$f(x,y+k)=z+\frac{dz}{dy}.k+\frac{d^2z}{dy^2}.\frac{k^2}{2}+\frac{d^3z}{dy^3}.\frac{k^3}{2.3}+\text{etc.}$$

De même, représentons par u, la fonction de x et y désignée par $\frac{dz}{dx}$; en mettant $y+k$ pour y, u se changera en $u+\frac{du}{dy}k+\frac{d^2u}{dy^2}.\frac{k^2}{2}+$ etc. Ainsi, remettant $\frac{dz}{dx}$ pour u.

$$\frac{dz}{dx}h \text{ deviendra } \frac{dz}{dx}h+\frac{d^2z}{dxdy}hk+\frac{d^3z}{dxdy^2}\frac{k^2h}{2}+\ldots\ldots$$

pareillement

$$\frac{d^2z}{dx^2}.\frac{h^2}{2} \text{ deviendra } \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3z}{dx^2dy}\frac{h^2k}{2}+\ldots\ldots$$

ainsi de suite. En réunissant ces diverses parties, on a

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k)=z&+\frac{dz}{dy}k+\frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\frac{d^3z}{dy^3}.\frac{k^3}{2.3}+\ldots\\&+\frac{dz}{dx}h+\frac{d^2z}{dxdy}kh+\frac{d^3z}{dxdy^2}.\frac{k^2h}{2}+\ldots\\&+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3z}{dydx^2}.\frac{h^2k}{2.3}+\ldots\\&+\frac{d^3z}{dx^3}.\frac{h^3}{2.3}+\ldots\end{aligned}$$

le terme général est $\frac{d^{m+n}z}{dy^m dx^n}\frac{k^m h^n}{(2.3...m)(2.3...n)}$.

Il est visible qu'on auroit pu changer d'abord y en $y+k$, puis dans le résultat x en $x+h$. Mais par là on auroit obtenu une série de forme différente de la première, qui auroit dû lui être identique : toutes les dérivées relatives à x auroient précédé celles de y. Il suffit pour y parvenir de changer ci-dessus y en x, et k en h, et réciproquement. L'identité de ce nouveau résultat avec le précédent, donne, en comparant terme à terme,

$$\frac{d^2z}{dydx}=\frac{d^2z}{dxdy},\ \frac{d^3z}{dy^2dx}=\frac{d^3z}{dxdy^2},\ \frac{d^3z}{dydx^2}=\frac{d^3z}{dx^2dy},$$

et en général..... $\frac{d^{m+n}z}{dy^m dx^n}=\frac{d^{m+n}z}{dx^n dy^m}$.

Concluons de là que *lorsqu'on doit prendre les dérivées successives d'une fonction z relativement à deux variables, il est indifférent dans quel ordre on fasse cette double opération.*

Par exemple, $z=\frac{x^3}{y^2}$ donne

$$\frac{dz}{dx}=\frac{3x^2}{y^2},\ \frac{dz}{dy}=-\frac{2x^3}{y^3}.$$

et la dérivée de la 1re. par rapport à y, ainsi que celle de la 2e. relativement à x sont également $-\frac{6x^2}{y^3}$. Les dérivées du 2e. ordre sont

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{6x}{y^2},\ \frac{d^2z}{dy^2}=\frac{6x^3}{y^4};$$

on trouvera $-\frac{12x}{y^3}$ pour dérivée de la 1re. relativement

à y, qui est aussi la dérivée du 2e. ordre de $\frac{dz}{dy}$ relativement à x. Pareillement $\frac{18x^2}{y^4}$ qui est la dérivée de $\frac{d^2z}{dy^2}$ par rapport à x, est aussi celle du 2e. ordre de $\frac{dz}{dx}$ par rapport à y, et ainsi des autres.

664. Puisque x et y sont indépendans dans l'équation $z=f(x,y)$, on peut en prendre la dérivée relativement à x seul ou à y; et on aura $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$. Mais s'il y avoit une dépendance établie entre y et x, telle que $y=\varphi x$, ces différences partielles ne pourroient plus être prises à part, puisque la variation de x entraîneroit celle de y. Pour renfermer ces deux cas en un seul, on a coutume de supposer que cette relation $y=\varphi x$ existe, et la dérivée se met sous la forme $dz=pdx+qdy$, (639); mais comme on laisse cette fonction φ arbitraire, il faudra y avoir égard dans les usages auxquels cette équation sera réservée. Si la question exige que la dépendance soit établie, de $y=\varphi x$ on tirera...... $dy=y'dx$ et on substituera; si la dépendance n'existe pas, alors, d'elle-même, l'équation différentielle se partagera en deux autres : car dz représente la différentielle de z prise relativement à x et y ensemble, d'où

$$\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy=pdx+qdy,$$

et, comme cette équation subsiste quel que soit φ ou sa dérivée y', on aura

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}y'=p+qy', \text{ d'où } \frac{dz}{dx}=p,\ \frac{dz}{dy}=q.$$

divisant ces deux équations l'une par l'autre $f't$ dispa- roît et on trouve $p\frac{dt}{dy}=q\frac{dt}{dx}$, relation qui exprime que z est une fonction de t, quelle que soit d'ailleurs la forme de cette fonction.

Par exemple, $z=f(x^2+y^2)$ donne

$$p=f'(x^2+y^2)\times 2x,\quad q=f'(x^2+y^2)\times 2y,$$

d'où $$py-qx=0;$$

or, de quelque manière que x^2+y^2 entre dans la valeur de z, cette équation demeurera la même : elle s'accordera avec $z=\log(x^2+y^2)$, $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$,..... $z=\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$, etc.... D'où il suit que toute fonction de x^2+y^2 doit être un cas particulier de l'*équation aux différentielles partielles* $py-qx=0$.

De même $y-bz=f(x-az)$, lorsqu'on différentie séparément par rapport à z et x, puis à z et y, donne

$$-bp=(1-ap)\times f',\quad (1-bq)=-aq\times f'$$

éliminant f', on a $ap+bq=1$, pour l'équation aux différentielles partielles de la proposée, quelque forme qu'ait d'ailleurs la fonction f.

En traitant de même $\frac{y-b}{z-c}=f\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$,..... on trouve $z-c=p(x-a)+q(y-b)$.

Nous aurons par la suite occasion de faire sentir l'importance de cette théorie ; nous nous bornerons ici à dire que les trois équations du 2e. ordre peuvent souvent servir à éliminer deux fonctions arbitraires, etc.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

1. *Développement en Séries des Fonctions d'une seule variable.*

666. FAISONS $x=0$ dans la formule A, n°. 644, et désignons par $f\ f'\ f''$......... les valeurs constantes que prennent fx, $f'x$, $f''x$.... lorsqu'on y met zéro pour x, nous aurons

$$fh=f+hf'+\frac{h^2}{2}f''+\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)};$$

Il est vrai que cette formule n'a lieu qu'autant que $x=0$ ne rend infinie aucune des quantités fx, $f'x$.... Changeons ici h en x; comme $f\ f'\ f''$ sont indépendans de h, on aura

$$y=fx=f+xf'+\frac{x^2}{2}f''+\frac{x^3}{2.3}f'''+\ldots.+\frac{x^{n-1}}{2.3\ldots.n-1}f^{(n-1)}.$$

La somme des termes qui suivent le n^e. est (662)

$$\frac{x^n}{2.3\ldots.n}f^{(n)}j,$$

j étant un nombre inconnu intermédiaire entre zéro et la valeur qu'on jugera à-propos d'attribuer à x : on fera $x=j$ dans $f^{(n)}x$. Telle est la formule due à Maclaurin, et qui sert à développer toute fonction de x

en série suivant les puissances entières et positives de x, lorsqu'elle en est susceptible.

Par exemple, $y=(a+x)^m$ donne

$$y'=m(a+x)^{m-1},\ y''=m(m-1)(a+x)^{m-2},\ldots$$

d'où $f=a^m, f'=ma^{m-1}, f''=m(m-1)a^{m-2},\ldots$

ce qui reproduit la série de Newton, son terme général et la limite des termes qui suivent le n^e.

De $y=\sin x$, on tire $y'=\cos x$, $y''=-\sin x,\ldots$ $y'''=-\cos x$; d'où o, 1, o et -1 pour les valeurs alternatives de $ff'f''\ldots$ jusqu'à l'infini : en substituant ci-dessus, on retrouve la série de $\sin x$. *Voy.* n°. 579.

On appliquera aisément les mêmes calculs à $\cos x$, a^x, $\log(1+x)$....... et, en général, à toute fonction de x. Si on prend $y=\text{arc}(\text{tang}=x)$ on retrouvera la série M n°. 580 (*Voy.* 888).

667. Si l'une des fonctions $f\,f'\,f''$.... est infinie, la formule de Maclaurin ne peut plus être employée, parce que la fonction proposée ne procède pas suivant les puissances entières et positives de la variable. Il faut alors ou la soumettre aux procédés du n°. 658, ou plutôt lui faire subir une transformation qui la rende propre à notre calcul : la supposition de $y=x^k z$ remplit souvent ce but, en déterminant la constante k, de sorte que $x=0$ ne rende infinie aucune des fonctions $y\,y'\,y''$...

Si, par exemple, on veut développer $y=\cot x$ en série, on voit qu'elle ne peut procéder uniquement suivant les puissances positives de x, puisque $\cot 0=\infty$. Faisons $y=\dfrac{z}{x}=\cot x$; d'où $z=\dfrac{x\cos x}{\sin x}$, ou à cause des formules F et G, n°. 579,

$$z=\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\ldots}{1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\ldots}$$

fonction dont on aura aisément les dérivées successives, qui ne sont pas infinies lorsque x est nul. On trouve $f=1$, $f'=0$, $f''=-\frac{2}{3}$,.... d'où

$$z=1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{3^2.5}-\ldots..$$

$$\text{et } \frac{z}{x} \text{ ou } \cot x=x^{-1}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{3^2.5}-\frac{2x^5}{3^3.5.7}-\frac{x^7}{3^3.5^2.7}\ldots$$

Ce procédé a d'ailleurs l'inconvénient de ne pas faire connoître la loi de la série. Nous enseignerons bientôt les moyens d'employer le calcul différentiel au développement de y en une fraction continue fonction de x; *voyez* n°. 778. On en tire même y sous la forme de série, d'après le procédé 543, 6°.

668. On peut appliquer aussi le théorême de Maclaurin aux équations à deux variables. Ainsi pour l'équation $mz^3-xz=m$, on prendra z', z'',...... (639), on fera $x=0$, et on aura

$$f=1,\ f'=\frac{1}{3m},\ f''=0,\ f'''=\frac{-2}{27m^3},\ldots.$$

$$\text{d'où}\quad z=1+\frac{x}{3m}-\frac{x^3}{81m^3}+\frac{x^4}{243m^4}-\text{etc.}$$

On peut même développer suivant les puissances d'une des constantes. Pour $my^3-x^3y-mx^3=0$, on prendra les dérivées y' y''.... relatives à m, x étant constant; puis on fera partout $m=0$; enfin on mettra les résultats pour $f\,f'\,f''$...... dans la série de Maclaurin, où on remplacera x par m. Ce calcul donnera

$$y=-m-m^4x^{-3}-3m^7x^{-6}-12m^{10}x^{-9}+55m^{13}x^{-12}\ldots$$

669. Si la valeur de y correspondante à $x=0$, donnoit $y^m=0$, on conçoit que y pourroit être infini : c'est ce qui a lieu pour $my^3-x^3y-mx^3=0$. Il faudroit alors user de l'artifice indiqué (667). En faisant $y=x^kz$, on trouve

$$mz^3x^{3k}-zx^{k+3}-mx^3=0,\quad \text{ou}\quad mz^3x^{3k-3}-zx^k=m,$$

en divisant tout par x^3 pour que le dernier terme soit sans x. Il est clair que toute valeur de k, qui ne donnera pas $z=0$ lorsque $x=0$, remplira le but qu'on se propose. Or, on peut y satisfaire de deux façons :

1°. $k=1$ donne $mz^3-xz=m$ qui vient d'être traité ; on mettra donc pour z dans $y=xz$ la 1re. série du n°. 668.

2°. $k=0$ donne $mz^3x^{-3}-z=m$; on fera $x^{-3}=u$, et il faudra développer z en u à l'aide de l'équation $mz^3u-z=m$; on restituera ensuite x^{-3} pour u, et pour z sa valeur y : on retrouve ainsi la deuxième série du n°. 668.

De même qu'on a dégagé le dernier terme de x, on pourra le chasser du 1er. terme en divisant par x^{3k} ; ce qui donnera

$$mz^3-zx^{3-2k}-mx^{3(1-k)}=0,$$

puis on fera $k=\frac{3}{2}$, d'où $mz^3-mx^{-\frac{3}{2}}=z$, posant. . . . . $x^{-\frac{3}{2}}=u$, et développant z en u, puis remettant pour u sa valeur $x^{-\frac{3}{2}}$; et faisant $y=x^{\frac{3}{2}}z$, on aura

$$y=\pm\sqrt{\frac{x^3}{m}}+\frac{m}{2}\mp\frac{3}{8}\sqrt{\frac{m^5}{x^3}}+\text{etc.}$$

On pourroit encore faire $k=1$, ou même dégager le 2e. terme de x, et déterminer ensuite k convenablement ; mais on n'obtiendroit pas de nouvelles séries.

De même $y^3-3axy+x^3=0$, en faisant $y=x^kz$ donne par un calcul semblable $k=2$, $=\frac{1}{2}$, $=1$; d'où on tire les séries suivantes :

$$y=\frac{x^2}{3a}+\frac{x^5}{3^4a^4}+\ldots$$

$$y=\pm\sqrt{(3ax)}-\frac{x^2}{6a}\mp\frac{x^3\sqrt{(3ax)}}{72a^3}-\frac{x}{2.3^4a^4}\text{ etc.}$$

$$y=-x\sqrt[3]{1}-\frac{a}{\sqrt[3]{1}}-\frac{a^2}{x}-\frac{4a^3\sqrt[3]{1}}{3x^2}\text{ etc.};$$

cette dernière est le développement de y suivant les puissances entières et positives de a.

670. On propose de développer $u=fy$ suivant les puissances de x, y étant lié à x par l'équation

$$y=a+x\varphi y\quad\ldots\ldots,\qquad(1)$$

les fonctions fy et φy étant données.

Pour cela, observons que si à l'aide de l'équation (1) on éliminoit y, u ne contiendroit plus que x, et la formule de Maclaurin deviendroit applicable. On chercheroit alors $u\ u'\ u''$.... puis $f,\ f'\ f''$ en faisant $x=0$. Or, le calcul différentiel sert à trouver les dérivées $u'\ u''$... sans recourir à l'élimination. En effet, les dérivées (633) relatives à x dans l'équation (1) sont

$$y'=\varphi y+xy'\varphi'y,\ y''=2y'\varphi'y+xy''\varphi'y+xy'^2\varphi''y\ldots.;$$

celles de $u=fy$ sont

$$u'=y'f'y,\quad u''=y''f'y+y'^2f''y,\ \ldots.,$$

et, faisant $x=0$, $y\ y'\ y''$ deviennent

$$a,\ \varphi a,\ 2\varphi a\varphi'a=(\varphi^2a)',\ (\varphi^3a)'',\ldots$$

de sorte qu'en substituant, $u\ u'\ u''$.... deviennent

$$fa\ldots\ \varphi af'a\ldots\ (\varphi^2a)'.f'a+\varphi^2a.f''a=(\varphi^2a.f'a)'\ \ldots$$

ce sont les valeurs de $f f' f''$.... et on trouve (*)

$$fy = fa + x\varphi a f'a + \frac{x^2}{2}(\varphi^2 a . f'a)' + \frac{x^3}{2.3}(\varphi^3 a . f'a)'' + \ldots$$

On entend par φa ce que devient φy, quand on y fait $y=a$; par $\varphi^2 a$ le carré de φa, par $f'a$ la dérivée de fa relative à a, par $(\varphi^2 a . f'a)'$ celle de la fonction $\varphi^2 a\, f'a$, etc.

(*) Quoique par ce procédé on puisse trouver autant de termes qu'on voudra, cependant la lo n'est pas évidente. Nous donnerons ici la démonstration de Laplace (*Méc. cél.* I, p. 172).

Considérons x et a comme des variables dans l'équation (1), et prenons les dérivées relatives à chacune (664) Nous continuerons de représenter par y', u', u''... celles qui se rapportent à x. Il viendra

$$y' = \varphi y + xy'\varphi' y, \quad \frac{dy}{da} = 1 + x\varphi' y . \frac{dy}{da}.$$

Eliminant $\varphi' y$, il vient $y' = \varphi y . \frac{dy}{da}$.

Traitons de même $u = fy$, nous aurons

$$u' = y' f' y, \quad \frac{du}{da} = f'y . \frac{dy}{da}, \text{ d'où } u' \frac{dy}{da} = y' \frac{du}{da},$$

et mettant $\varphi y . \frac{dy}{da}$ pour y', on trouve

$$u' = \varphi y . \frac{du}{da} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Les dérivées $f'y$, y', u' sont relatives à x. Cela posé, puisque... $\frac{du}{da} = f'y . \frac{dy}{da}$, u' est le produit de $\frac{dy}{da}$ par cette fonction de $y\varphi y . f'y$: on peut donc supposer que la valeur (2) de u' est aussi la dérivée relative à a d'une fonction de y, telle que $z = Fy$; en sorte que

$$u' = \frac{dz}{da}, \text{ d'où } u'' = \frac{d^2 z}{da\,dx} = \frac{dz'}{da},$$

Soit demandée la valeur développée de y^m, en supposant $y = a + xy^n$. En comparant à l'équation (1) il vient

$$fa = a^m,\ \varphi a = a^n,\quad \varphi af'a = ma^{m+n-1}$$
$$\varphi^2 af'a = ma^{m+2n-1},\quad \varphi^3 af'a = ma^{m+3n-1},\ \text{etc.}$$

d'où $y^m = a^m + mxa^{m+n-1} + m.\dfrac{m+2n-1}{2}x^2a^{m+n-2} + \ldots$

On auroit aussi la valeur de y^m dans le cas où l'équation (1) seroit remplacée par $\alpha + \beta y + \gamma y^n = 0$; il suffiroit de faire ici $a = -\dfrac{\alpha}{\beta}$, $x = -\dfrac{\gamma}{\beta}$.

---

z' étant la dérivée de Fy relative à x. Or on peut dire de la fonction $z = Fy$, tout ce qu'on a dit de $u = fy$ comparé à $y = a + x\varphi y$: par conséquent l'équation (2) aura lieu en z aussi bien qu'en u, φy restant le même; donc

$$(3)\ldots\ldots\ z' = \varphi y.\frac{dz}{da},\quad \text{ou}\quad z' = \varphi^2 y.\frac{du}{da},$$

en remettant u' pour $\dfrac{dz}{da}$. On a donc

$$u'' = \frac{dz'}{da} = \left(\varphi^2 y.\frac{du}{da}\right)',$$

la dérivée étant ici relative à a. De même on regardera $\varphi^2 y.\dfrac{du}{da}$ comme la dérivée par rapport à a, d'une autre fonction $z = \psi y$ de y. D'où $\varphi^2 y.\dfrac{du}{da} = \dfrac{dz}{da}$, ce qui change (3) en $z' = \varphi^3 y.\dfrac{du}{da}$.

Or $u'' = \dfrac{dz'}{da}$, donne

$$u''' = \frac{d^2z'}{da\,dx} = \frac{d^3z}{da^2dx} = \frac{d^2z'}{da^2},\ \text{donc}\ u''' = \left(\varphi^3 y.\frac{du}{da}\right)'',\ \text{etc.}$$

Il ne reste plus qu'à faire $x = 0$, d'où $y = a$, $u = fa$, $\dfrac{du}{da} = f'a$, et on obtient enfin pour u', u''... les valeurs ci-dessus, dont la loi est rendue manifeste.

ce sont les valeurs de $f f' f''$.... et on trouve (*)

$$fy = fa + x\varphi a f'a + \frac{x^2}{2}(\varphi^2 a . f'a)' + \frac{x^3}{2.3}(\varphi^3 a . f'a)'' + \ldots$$

On entend par φa ce que devient φy, quand on y fait $y = a$; par $\varphi^2 a$ le carré de φa, par $f'a$ la dérivée de fa relative à a, par $(\varphi^2 a . f'a)'$ celle de la fonction $\varphi^2 a\, f'a$, etc.

(*) Quoique par ce procédé on puisse trouver autant de termes qu'on voudra, cependant la lo n'est pas évidente. Nous donnerons ici la démonstration de Laplace (*Méc. cél.* I, p. 172).

Considérons x et a comme des variables dans l'équation (1), et prenons les dérivées relatives à chacune (664) Nous continuerons de représenter par y', u', u''... celles qui se rapportent à x. Il viendra

$$y' = \varphi y + xy'\varphi' y\,,\quad \frac{dy}{da} = 1 + x\varphi' y . \frac{dy}{da}.$$

Eliminant $\varphi' y$, il vient $y' = \varphi y . \frac{dy}{da}$.

Traitons de même $u = fy$, nous aurons

$$u' = y' f' y,\quad \frac{du}{da} = f'y . \frac{dy}{da},\ \text{d'où}\ u' \frac{dy}{da} = y' \frac{du}{da},$$

et mettant $\varphi y . \frac{dy}{da}$ pour y', on trouve

$$u' = \varphi y . \frac{du}{da} \ldots\ldots\ldots (2).$$

Les dérivées $f'y$, y', u' sont relatives à x. Cela posé, puisque... $\frac{du}{da} = f'y . \frac{dy}{da}$, u' est le produit de $\frac{dy}{da}$ par cette fonction de $y\varphi y . f'y$: on peut donc supposer que la valeur (2) de u' est aussi la dérivée relative à a d'une fonction de y, telle que $z = Fy$; en sorte que

$$u' = \frac{dz}{da},\ \text{d'où}\ u'' = \frac{d^2 z}{da\,dx} = \frac{dz'}{da},$$

Soit demandée la valeur développée de y^m, en supposant $y = a + xy^n$. En comparant à l'équation (1) il vient

$$fa = a^m,\ \varphi a = a^n,\quad \varphi af'a = ma^{m+n-1}$$
$$\varphi^2 af'a = ma^{m+2n-1},\quad \varphi^3 af'a = ma^{m+3n-1}, \text{ etc.}$$

d'où $y^m = a^m + mxa^{m+n-1} + m.\dfrac{m+2n-1}{2}x^2a^{m+n-2} + \ldots$

On auroit aussi la valeur de y^m dans le cas où l'équation (1) seroit remplacée par $\alpha + \beta y + \gamma y^n = 0$; il suffiroit de faire ici $a = -\dfrac{\alpha}{\beta}$, $x = -\dfrac{\gamma}{\beta}$.

---

z' étant la dérivée de Fy relative à x. Or on peut dire de la fonction $z = Fy$, tout ce qu'on a dit de $u = fy$ comparé à $y = a + x\varphi y$: par conséquent l'équation (2) aura lieu en z aussi bien qu'en u, φy restant le même ; donc

$$(3)\ldots\ldots\ z' = \varphi y.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a},\quad \text{ou}\quad z' = \varphi^2 y.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a},$$

en remettant u' pour $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a}$. On a donc

$$u'' = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}a} = \left(\varphi^2 y.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}\right)',$$

la dérivée étant ici relative à a. De même on regardera $\varphi^2 y.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}$ comme la dérivée par rapport à a, d'une autre fonction $z = \psi y$ de y. D'où $\varphi^2 y.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a}$, ce qui change (3) en $z' = \varphi^3 y.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}$.

Or $u'' = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}a}$, donne

$$u''' = \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}a^2\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}a^2},\ \text{donc}\ u''' = \left(\varphi^3 y.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}\right)'',\ \text{etc.}$$

Il ne reste plus qu'à faire $x = 0$, d'où $y = a$, $u = fa$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a} = f'a$, et on obtient enfin pour u', u'' ... les valeurs ci-dessus, dont la loi est rendue manifeste.

Voyez *Méc. cél.* I, p. 177, une application curieuse de notre formule.

671. En faisant $x = 1$, on trouve pour le développement de fy, lorsque $y = a + \phi y$

$$fy = fa + \phi a f'a + \tfrac{1}{2}(\phi^2 a . f'a)' + \tfrac{1}{6}(\phi^3 a . f'a)'' + \ldots$$

C'est sous cette forme que Lagrange avoit d'abord présenté son théorême que Laplace a généralisé ensuite. Voy. la *Résol. numé.* note XI, 21; et les *Fonct. anal.* 97.

Si la fonction fy qu'on veut développer est y, fa devient a, $f'a = 1$; donc

$$y = a + \phi y = a + \phi a + \left(\frac{\phi^2 a}{2}\right)' + \left(\frac{\phi^3 a}{2.3}\right)'' + \ldots.$$

Appliquons cette formule au retour des suites. Soit l'équation

$$\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots = 0$$

d'où
$$y = -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{y^2}{\beta}(\gamma + \delta y + \ldots)$$

Comparant à $y = a + \phi y$, on voit qu'il faut faire

$$a = -\frac{\alpha}{\beta},\ \phi y = -\frac{y^2}{\beta}(\gamma + \delta y + \ldots)$$

Donc en laissant a au lieu de $-\dfrac{\alpha}{\beta}$, on trouve

$$y = a - \frac{a^2}{\beta}(\gamma + \delta a + \ldots) + \left(\frac{a^4}{8\beta^2}(\gamma + \delta a + \ldots)^2\right)' + \ldots$$

Suivant que l'équation sera ou ne sera pas limitée, on aura la valeur exacte ou approchée de y. Voy. la *Résol. numér.* de Lagrange, not. XI, n°. 18.

2. *Sur la Résolution des Équations.*

672. Nous démontrerons ici plusieurs théorêmes déja donnés sur les équations.

I. Soit y une fonction de x, qui admet les facteurs $(x-a)^m$, $(x-b)^n$,... en sorte que

$$y = (x-a)^m (x-b)^n \ldots P$$

P ne contenant que des facteurs du 1er. degré inégaux; en prenant les logarithmes des deux membres et la dérivée, on trouve

$$y' = (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1} \ldots \{ mP(x-b) \ldots + nP(x-a) \ldots + \text{etc.} \}.$$

Ainsi la fonction de x proposée a $(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}\ldots$ pour plus grand commun diviseur avec sa dérivée, ce qui reproduit le théorême des racines égales (510).

II. La dérivée de $\log(\cos x \pm \sin x . \sqrt{-1})$ est $\dfrac{-\sin x \pm \cos x . \sqrt{-1}}{\cos x \pm \sin x . \sqrt{-1}}$ qui se réduit à $\pm\sqrt{-1}$. Or, $\sqrt{-1}$ est aussi la dérivée de $x\sqrt{-1} + A$, A étant une constante arbitraire ; donc (702)

$$\log(\cos x \pm \sin x . \sqrt{-1}) = \pm x \sqrt{-1} + A.$$

Comme cette équation doit avoir lieu quel que soit x, on fera $x = 0$, d'où on tirera $A = 0$. On en conclut le théorême (580, 4°.), d'où il sera aisé de tirer les formules H, I et K, et par suite les facteurs de $x^m \pm a^m$, (529).

III. Soit une équation $x^m + px^{m-1} + \ldots + u = 0$ décomposée en ses facteurs simples $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$ les logarithmes de ces deux fonctions de x sont identiques, d'où

$$\log(x^m + px^{m-1} + \ldots) = \log(x-a) + \log(x-b) + \ldots$$

et prenant les dérivées de part et d'autre

$$\frac{mx^{m-1}+p(m-1)x^{m-2}+\dots}{x^m+px^{m-1}+\dots}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\dots$$

Cela posé, développons chaque fraction suivant les puisances positives de a, b, ... nous trouverons (561)

$$\frac{m}{x}+\frac{f_1}{x^2}+\frac{f_2}{x^3}+\frac{f_3}{x^4}+\dots$$

$f_1 f_2 \dots$ étant les sommes des puissances $1, 2, \dots$ des racines, comme n°. 539. Notre identité ayant pris ce développement pour 2°. membre, multiplions-la par...... $x^m+px^{m-1}+\dots$ puis comparons terme à terme, il viendra

$$f_1+p=0,\ f_2+pf_1+2q=0,\ \text{etc.}$$

et comme passé le m^e. terme, il se forme une série récurrente dont l'échelle de relation est $p, q, r\dots u$, on retrouve le théorême de Newton (539) sur les sommes des puissances des racines. De là on déduira (*V.* n°. 541) la résolution des équations numériques, l'élimination,....

IV. Fx désignant une fonction rationnelle et entière de x, soit k la partie approchée d'une des racines de l'équation $Fx=0$ et y la correction qu'elle doit subir, d'où $x=k+y$; on aura

$$F(k+y)=Fk+y\,F'k+\tfrac{1}{2}y^2\,F''k+\dots=0$$

lorsqu'on néglige $y^2, y^3\dots$, attendu que y est une petite quantité, on trouve $y=-\frac{Fk}{F'k}$, ce qui s'accorde avec la méthode de Newton (516).

En ne négligeant aucun terme, on peut tirer la valeur de y de cette équation, à l'aide de la série n°. 671. On y fera $\alpha=Fk$, $\beta=F'k$,.... et posant, pour abréger,...

$z=\frac{Fk}{F'k}$, qui est la 1[re] correction, il vient

$$y=-z-\frac{z^2}{2}\cdot\frac{F''k}{F'k}+\frac{z^3}{2.3}\text{ etc.}$$

la racine cherchée, ou $k+y$, est donc

$$x=k-z-\frac{z'^2}{2}\cdot\frac{F''k}{F'k}+\frac{z^3}{2.3}\left\{\frac{F'''k}{F'k}-3\left(\frac{F''k}{F'k}\right)^2\right\}+\ldots$$

C'est ainsi que de l'équation $x^3-2x=5$, on tire $k=2,1$ pour valeur approchée de l'une de ses racines : or $Fk=k^3-2k-5=0,061$; $F'k=3k^2-2=11,23$; $F''k=6k=12,6$; donc

$$z=\frac{Fk}{F'k}=\frac{61}{11230},\quad \frac{F''k}{F'k}=\frac{1260}{1123}$$

et $x=2,1-0,00543188-0,00001655=2,09455157$

3. *Sur les Valeurs* $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, etc.

673. Cherchons la valeur de la fraction $\frac{P}{Q}$, lorsqu'en faisant $x=a$, les fonctions de x désignées par P et Q sont nulles. Si P et Q sont rationnelles, $x-a$ en est facteur commun, d'où $\frac{P}{Q}=\frac{R(x-a)^m}{S(x-a)^n}$, R et S ne devenant pas nuls pour $x=a$; on supprime ensuite le facteur commun. Si $m=n$, $\frac{P}{Q}=\frac{R}{S}$ et il ne s'agit plus que de faire $x=a$: mais si $m>$ ou $<n$, $x-a$ reste pour facteur du numérateur, ou du dénominateur, qui devient nul ; la fraction a donc dans le 1[er]. cas une valeur finie ; elle est nulle ou infinie dans les deux autres.

Mais outre que ce calcul est assez long, il n'est plus praticable lorsque la fraction est irrationnelle ou transcendante. Changeons x en $x+h$,

$$\frac{P}{Q} \text{ deviendra } \frac{P+hP'+\frac{1}{2}h^2P''+\ldots}{Q+hQ'+\frac{1}{2}h^2Q''+\ldots}$$

faisons ensuite $x=a$: P et Q sont nuls, on divise ensuite haut et bas par h et on a

$$\frac{P'+\frac{1}{2}hP''+\ldots}{Q'+\frac{1}{2}hQ''+\ldots}$$

$h=0$, donne $\frac{P'}{Q'}$. Remarquons que les suppositions de $x=a$ et $h=0$, reviennent à avoir changé x en a. Ainsi, lorsque $x=a$, $\frac{P}{Q}=\frac{P'}{Q'}$. S'il arrive que P' ou Q' est encore $=0$, la fraction est donc nulle ou infinie; et si P' et Q' disparoissent ensemble du développement ci-dessus, il faudra diviser par $\frac{1}{2}h^2$ et faire $h=0$; on aura, pour $x=a$, $\frac{P}{Q}=\frac{P''}{Q''}$: et ainsi de suite.

Donc, *pour avoir la valeur d'une fraction qui devient* $\frac{0}{0}$ *lorsque* x = a, *on différentiera le numérateur et le dénominateur un même nombre de fois jusqu'à ce que l'un ou l'autre ne devienne plus zéro; puis mettre* a *pour* x. On ne doit pas craindre que toutes les dérivées P' $P''\ldots$ soient nulles, car alors, quel que soit h, on auroit $f(a+h)=0$, ce qui est impossible. On en dira autant de Q' $Q''\ldots$

Voici quelques exemples de cette théorie.

I. La somme des n premiers termes de la progression $\div 1 : x : x^2 : x^3 \ldots$ est $\frac{x^n-1}{x-1}$, (144); si $x=1$, cette fraction devient $\frac{0}{0}$; prenant les dérivées des deux termes,

nous aurons $\frac{nx^{n-1}}{1}$, qui donne n pour la somme cherchée, ce qui est d'ailleurs évident.

II. Soit $\frac{ax^2 + ac - 2acx}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$, qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x = c$: les dérivées du 1er. ordre donnent encore $\frac{ax - ac}{bx - bc} = \frac{0}{0}$; il faut procéder à une nouvelle dérivation et on a $\frac{a}{b}$. Il a fallu deux opérations successives, parce que $(x - c)^2$ étoit facteur commun.

III. De même $\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$ donne $\frac{0}{0}$ pour $x = a$; les dérivées des deux termes donnent $\frac{3x^2 - 2ax - a^2}{2x}$, qui pour $x = a$, est nulle : zéro est donc la valeur cherchée, ce qui vient de ce que le facteur du numérateur est $(x - a)^2$ et que celui du dénominateur est $(x - a)$. Pour la même fraction renversée on auroit trouvé l'infini, par une raison semblable. C'est ce qui arrive pour $x = a$ dans

$$\frac{ax - x^2}{a^4 - 2a^3x + 2ax^3 - x^4},$$

IV. $x = 0$ rend $\frac{a^x - b^x}{x} = \frac{0}{0}$, les dérivées donnent $\frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right)$.

V. Pour $\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ dans le cas où l'arc x est le quadrans, on aura $\frac{-\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} = 1$.

VI. Quand $x = a$, $\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{(a^2x)}}{a - \sqrt[4]{(ax^3)}}$ devient $\frac{0}{0}$:

les dérivées des deux termes sont

$$\frac{a^3-2x^3}{\sqrt{(2a^2x-x^4)}}-\frac{a^2}{3\sqrt[3]{(ax^2)}} \text{ et } -\frac{3a}{4\sqrt[4]{(a^3x)}}$$

on a donc $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée.

VII. On verra de même que $x=1$, donne $\frac{0}{0}$ pour

$$\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{(2x-x^2)}} \text{ et } \frac{x^x-x}{1-x+\log x}$$

et que les valeurs respectives sont -1 et -2.

674. La méthode que nous venons d'exposer cessera d'être applicable si le théorême de Taylor est *fautif dans l'ordre des termes qu'on est obligé de conserver* : ce qu'on reconnoîtra aisément puisque l'une des dérivées auxquelles on sera conduit deviendra infinie. Alors il faudra changer x en $a+h$ dans $\frac{P}{Q}$, et effectuer le développement (658), en se bornant au 1er. terme de chacun. On aura alors $\frac{Ah^m+\ldots}{Bh^n+\ldots}$, m ou n étant fractionnaire ou négatif. On divisera les deux termes par la puissance la plus basse de h et on fera $h=0$. Si $m=n$ on a la valeur finie $\frac{A}{B}$; elle est nulle ou infinie suivant que m est $>$ ou $<$ n.

I. Soit $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$; $x=a$ donne $\frac{0}{0}$, et il est inutile de recourir aux dérivées des deux termes, puisque celle du dénominateur est infinie. Faisant $x=a+h$, on trouve $\frac{(2ah+h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}$, qu'on réduit à $\frac{(2a+h)^{\frac{3}{2}}}{1}$; $h=0$ donne enfin $(2a)^{\frac{3}{2}}$ pour la valeur cherchée.

II. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$: faisons $x=a+h$, nous aurons

$$\frac{(a+h)^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}+h^{\frac{1}{2}}}{(2ah+h^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{h^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}h+\ldots}{h^{\frac{1}{2}}(2a+h)^{\frac{1}{2}}}$$

en développant par la formule du binome. On divisera haut et bas par $h^{\frac{1}{2}}$ et faisant ensuite $h=0$, on aura enfin $\frac{1}{\sqrt{(2a)}}$, qui est la valeur demandée.

III. Pour $x=c$ dans $\frac{(x-c)\sqrt{(x-b)}+\sqrt{(x-c)}}{\sqrt{2c}-\sqrt{(x+c)}+\sqrt{(x-c)}}$, on mettra $c+h$ pour x; on pourra même employer la formule de Taylor à la recherche des termes provenus de $(x-c)\sqrt{(x-b)}$ et $\sqrt{(x+c)}$, pour lesquels elle n'est pas fautive (660), on aura $\frac{\sqrt{h}+h\sqrt{(c-b)}+\ldots}{\sqrt{h}-\frac{1}{2}h(2c)^{-\frac{1}{2}}+\ldots}$; divisant par $\sqrt{h}$ et faisant ensuite $h=0$, on trouve 1 pour la valeur cherchée.

IV. $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}+x-a}{(1+x-a)^3-1}$ est $\frac{0}{0}$ lorsque $x=a$; mettons $a+h$ pour x, et developpons, nous aurons... $\frac{h+(2ah)^{\frac{3}{2}}\text{ etc.}}{3h+3h^2\text{ etc.}}$; donc $\frac{1}{3}$ est le nombre demandé.

675. Lorsque $x=a$ donne à un produit PQ la forme $0\times\infty$, on met pour Q une valeur $\frac{1}{R}$, telle que R soit nul pour $x=a$; alors on a la fraction $\frac{P}{R}$ qui devient $\frac{0}{0}$, $(1-x)$ tang $(\frac{1}{2}\pi x)$, lorsque $x=1$, est dans le cas

dont il s'agit. Mettons $\frac{1}{\cot\left(\frac{1}{2}\pi x\right)}$ pour la tangente et nous aurons $\frac{1-x}{\cot\left(\frac{1}{2}\pi x\right)}$; cette fraction traitée comme on l'a dit donne $\frac{2}{\pi}$.

On raisonnera de même si $\frac{P}{Q}$ devient $\frac{\infty}{\infty}$: soit, par exemple, $P = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2}.\frac{x}{a}\right)$, et $Q = \frac{x^2}{a(x^2-a^2)}$; la fraction devient $\frac{\infty}{\infty}$ lorsque $x=a$; mais elle se change en

$$\frac{a\,(x^2-a^2)}{x^2 \cot\left(\frac{\pi}{2}.\frac{x}{a}\right)} \text{ d'où } \frac{2\,a^2}{-\frac{1}{2}\pi a} = -\frac{4a}{\pi}.$$

Enfin si on a $\infty - \infty$ pour $x=a$, on transformera l'expression en $\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}$, P et Q étant nuls; ou $\frac{Q-P}{PQ}$, ce qui rentre encore dans ce qu'on vient de dire. C'est ainsi que $\frac{1}{\log x} - \frac{x}{\log x}$ pour $x=1$, prend la forme $\frac{1-x}{\log x}$; on aura enfin -1 pour le nombre demandé.

4. *Des Maxima et Minima.*

676. Lorsqu'en attribuant à x différentes valeurs successives dans une fonction $y = fx$, elle croît d'abord pour décroître ensuite, on donne le nom de *Maximum* à l'état de la fonction qui sépare les accroissemens des décroissemens : et si fx décroît d'abord pour croître ensuite, le

Minimum est l'état qui sépare les décroissemens des accroissemens. On dit donc qu'*une fraction* fx *est rendue un* maximum *ou un* minimum *par la supposition de* x = a, *lorsqu'elle est plus grande dans le* 1er. *cas et plus petite dans le* 2e. *que les valeurs qu'elle auroit en prenant pour* x *deux nombres*, *l'un* > a, *l'autre* < a IMMÉDIATEMENT.

Si, par exemple, on représente par une courbe CENI... l'équation $y = fx$, pour les *maxima* CB GF, les ordonnées *immédiatement* voisines sont plus petites que celles-là : le contraire a lieu pour les *minima* III. On voit aussi qu'une fonction fx peut avoir plusieurs *maxima* et *minima* inégaux entre eux. 2.

Ainsi pour juger si fa est un *maximum* ou un *minimum*, il faut que $f(a+h)$ et $f(a-h)$ soient tous deux $> fa$, ou tous deux $< fa$, quelque petit que soit h. Mais

$$f(a+h) = fa + hf'a + \frac{h^2}{2}f''a + \text{etc.}$$

$$f(a-h) = fa - hf'a + \frac{h^2}{2}f''a + \text{etc.}$$

Dans ces développemens, on pourra toujours prendre h assez petit, pour que le terme $hf'a$ l'emporte sur la somme de ceux qui le suivent (662), en sorte que le signe de $hf'a$ sera celui de toute la suite à partir de ce terme. On aura donc $f(a+h) = fa + Ph$ et $f(a-h) = fa - Qh$. Or, il est visible que fa ne peut être compris entre ces valeurs ; ainsi fa n'est ni *maximum* ni *minimum*. On voit qu'il faut que $f'a = 0$, et que pour trouver les valeurs de x, qui sont seules capables de rendre fx un *maximum* ou un *minimum*, il faut résoudre l'équation

$$y' = f'x = 0$$

Alors nos développemens réunis en un seul, sont

$$f(a \pm h) = fa + \tfrac{1}{2} h^2 f'' a \pm \tfrac{1}{6} h^3 f''' a + \ldots$$

et si $f''a$ est positif on voit que $f(a+h) = fa + Ph^2$ et $f(a-h) = fa + Qh^2$ d'où il suit qu'il y a *minimum*. On verroit qu'il y a *maximum* si $f''a$ est négatif.

Mais si $f''a = 0$, on a

$$f(a \pm h) = fa \pm \tfrac{1}{6} h^3 f''' a + \tfrac{1}{24} h^4 f^{\text{IV}} a + \ldots.$$

et on retombe sur un développement semblable à celui du 1er. cas, d'où il résulte qu'il n'y a ni *maximum* ni *minimum*, si $f'''a$ n'est pas nul : $f^{\text{IV}}a$ est négatif pour l'un et positif pour l'autre ; et ainsi de suite.

On voit donc qu'*après avoir trouvé les racines de l'équation* $f'x = 0$, *on substituera chacune dans* $f''x$, $f'''x$,... *jusqu'à la première dérivée qui n'est pas nulle : la racine correspondra à un* maximum *ou un* minimum *suivant que cette dérivée sera négative ou positive; pourvu qu'elle soit d'ordre pair ; car sans cela, il n'y auroit ni l'un ni l'autre.*

Nous présenterons ici quelques exemples.

I. Pour $y = \sqrt{(2px)}$, on a $y' = \dfrac{p}{\sqrt{(2px)}}$; cette quantité ne pouvant être rendue nulle, la fonction $\sqrt{(2px)}$ n'est susceptible de *maximum* ni de *minimum*.

II. Pour $y = b - (x-a)^2$, on trouve. . . . . $y' = -2(x-a) = 0$, d'où $x = a$, $y'' = -2$: ainsi $x = a$ donne le *maximum* $y = b$, puisque y'' est négatif ; c'est ce qui est d'ailleurs visible. Pour. . . $y = b + (x-a)^2$, on auroit un *minimum*.

En général $y' = X(x-a)^n$ donne $x = a$,

$$y'' = \{X'(x-a) + nX\}(x-a)^{n-1}, \; y''' = \text{etc.}$$

Il sera facile de voir que $x = a$ donne un *maximum* ou

un *minimum* suivant que X devient par là négatif ou positif, pourvu que n soit impair.

III. Soit $y = \frac{x}{1+x^2}$; on en tire (1re. règle, n°. 632)

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ y'' = -2x\,\frac{1+2y'(1+x^2)}{(1+x^2)^2},$$

$y' = 0$ donne $x = \pm 1$; mais alors $y = \pm \frac{1}{2}$ et $y'' = \mp \frac{1}{2}$; donc $x = 1$ répond au *maximum* $\frac{1}{2}$; et $x = -1$ au *minimum* $-\frac{1}{2}$, ou plutôt au *maximum* négatif, puisque nous sommes convenus de regarder les quantités comme plus grandes ou plus petites suivant qu'elles sont plus avancées vers l'infini positif ou négatif.

IV. Pour $y^2 - 2mxy + x^2 = a^2$, on trouve (639)

$$y' = \frac{my - x}{y - mx},\ y'' = \frac{2my' - y'^2 - 1}{y - mx},\ldots$$

en employant pour plus de commodité la 1re. règle du n°. 632. $y' = 0$ donne $my = x$; éliminant x et y à l'aide de la proposée, on trouve

$$x = \frac{\pm ma}{\sqrt{(1-m^2)}},\ y = \frac{\pm a}{\sqrt{(1-m^2)}},$$

et comme $y'' = \frac{\mp 1}{a\sqrt{(1-m^2)}}$, on a un *maximum* et un *minimum*.

V. Pareillement $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ donne

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax},\ y'' = \frac{2(ay' - x - yy'^2)}{y^2 - ax},\ldots$$

on voit que $x = 0$ répond au *minimum* $y = 0$; et $x = a\sqrt[3]{2}$ au *maximum* $y = a\sqrt[3]{4}$.

VI. Partager un nombre a en deux parties, de sorte que le produit de la puissance m de l'une par la puissance n de l'autre, soit le plus grand possible. En prenant x pour l'une des parties, il faudra rendre un *maximum* la quantité

$$y = x^m (a-x)^n;$$

d'où $y' = x^{m-1} (a-x)^{n-1} \{ma - x(m+n)\}$

$y'' = x^{m-2} (a-x)^{n-2} \{(m+n-1)(m+n)x^2 - \text{etc.}\}$

$y' = 0$ donne $x = 0$, $x = a$ et $x = \frac{ma}{m+n}$: cette dernière racine convient au *maximum* qui est ....
$m^m n^n \left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n}$; les deux autres répondent à des *minima* quand m et n sont pairs.

On verra donc que pour partager un nombre a en deux parties dont le produit soit le plus grand possible, il faut en prendre la moitié : c'est pour cela que si on a q positif $> \frac{1}{4}p^2$, les racines de $x^2 + px + q = 0$ sont imaginaires. (*Voy.* 137, 4°.)

VII. Quel est le nombre x dont la racine x^e. est un *maximum*? on a $y = \sqrt[x]{x}$, d'où (649)

$$y' = y \cdot \frac{1 - \log x}{x^2} = 0 \text{ et } \log x = 1,$$

le nombre cherché est donc la base des logarithmes népériens, ou $x = e = 2{,}71828\ldots$

VIII. De toutes les fractions quelle est celle qui surpasse sa puissance m^e. du plus grand nombre possible? Soit x cette fraction, on a $y = x - x^m$,

$$y' = 1 - mx^{m-1} = 0, \text{ d'où } x = \sqrt[m-1]{\frac{1}{m}}.$$

IX. De toutes les cordes supplémentaires d'une ellipse, quelles sont celles qui forment le plus grand angle ? En désignant par a et b les demi-axes, α et α' les tangentes des angles que ces cordes font avec les x, et faisant $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$ (406), l'angle des cordes a pour tangente (370)

$$\frac{\alpha' - \alpha}{1 + \alpha\alpha'} = -\frac{a^2}{a^2 - b^2}\left\{\frac{b^2}{\alpha a^2} + \alpha\right\}.$$

Prenant la dérivée relative à α, on trouve . . . . $-\frac{b^2}{a^2\alpha^2} + 1 = 0$, d'où $\alpha = \pm\frac{b}{a}$; donc (433) les cordes dont il s'agit sont dirigées à l'une des extrémités du petit axe : leurs parallèles menées par le centre, sont donc les diamètres conjugués qui forment le plus petit angle possible (431, 5°.) ; ces diamètres sont égaux. On a encore $\alpha = \infty$, qui répond au *minimum*, et donne les axes de l'ellipse.

X. De tous les triangles construits sur une même base a, et *Isopérimètres*, c.-à-d., de même contour $2p$, quel est celui dont l'aire est la plus grande? on a (338)

$$y^2 = p(p-a)(p-x)(a+x-p)$$

en désignant l'aire par y, et l'un des côtés inconnus par x ; car le 3e. côté est $2p - a - x$. Pour rendre y^2 un *maximum*, prenons les logarithmes et la dérivée, nous aurons

$$\frac{-1}{p-x} + \frac{1}{a+x-p} = 0, \text{ d'où } 2x = 2p - a;$$

ainsi le triangle cherché est isoscèle.

En général de tous les polygones isopérimètres, celui dont

19. l'aire est la plus grande est équilatéral; car soit $ABCDE$ le polygone *maximum*, si AB n'est pas $= BC$, faisons le triangle isoscèle AIC, tel que $AI + IC = AB + BC$; nous aurons $AIC > ABC$, d'où $AICDE > ABCDE$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

20. XI. Sur une base donnée $AC = a$, quel est le plus petit des triangles circonscrits au cercle OF? Soit le rayon $OF = r$, $AF = AD = x$, le périmètre $2p$, CF sera $= CE = a - x$; $BE = BD$ sera $= p - a$. Les trois côtés étant a, $p - x$ et $p - a + x$, l'aire y du triangle (338) sera donnée par

$$y^2 = px(p - a)(a - x),$$

et mettant $\frac{y}{r}$ pour p, on aura

$$yr^2 = x(y - ar)(a - x);$$

prenant la dérivée, et faisant $y' = 0$, on trouvera . . . $(y - ar)(a - 2x) = 0$; d'où $x = \frac{1}{2}a$; F est le milieu de AC; les deux autres côtés sont égaux, et le triangle est isoscèle.

21. XII. Soit pris les parties quelconques égales $Aa\ Bb\ Cc\ Dd$ sur les côtés d'un carré $ABCD$; la figure $abcd$ sera un carré; car 1°. $aB = bC = \ldots$ de sorte que le triangle $dAa = aBb = \ldots$, et par conséquent $ab = bc = cd = ad$; 2°. a est le sommet de deux angles complémens, et de l'angle dab, donc celui-ci est droit; de même pour abc etc...

Cela posé, de tous les carrés inscrits dans un carré donné, on demande le plus petit. Soit $AB = a$, $Aa = x$, d'où $aB = a - x$; puis le triangle Aab donne

$$ad^2 = 2x^2 - 2ax + a^2, \quad 4x - 2a = 0;$$

donc $x = \frac{1}{2}a$; ainsi le point a est au milieu de AB.

XIII. De tous les parallélipipèdes rectangles égaux à un cube donné a^3 et dont la ligne b est une arête, quel est celui dont la surface est la plus petite? Soit x et y les autres arêtes, bxy sera le volume $=a^3$; donc b, x et $\frac{a^3}{bx}$ sont les dimensions du parallélipipède; ses faces ont pour aires $\frac{a^3}{b}$, bx et $\frac{a^3}{x}$; le double de leur somme est l'aire totale. Egalons la dérivée à zéro, nous trouverons $2b-\frac{2a^3}{x^2}=0$, d'où $x=\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, et par conséquent $y=\sqrt{\frac{a^3}{b}}=x$: donc les deux autres dimensions doivent être égales.

Si le côté b n'est pas donné, x étant toujours l'un d'eux, les autres doivent être $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$, en sorte que la surface totale est $\frac{2a^3}{x}+4\sqrt{a^3x}$, d'où

$$\frac{a^3}{x^2}=\sqrt{\frac{a^3}{x}} \text{ et } x=a;$$

le cube proposé est donc le parallélipipède rectangle de moindre surface.

XIV. Lorsqu'on veut appliquer aux courbes la règle donnée, on forme (639) la dérivée de leur équation : les racines réelles de x et y qui satisfont à la proposée et à sa dérivée s'obtiennent par l'élimination; elles peuvent seules répondre à des *maxima* ou *minima* d'ordonnées. On prendra la dérivée du 2e. ordre, et faisant $y'=0$, puis mettant pour x et y l'un des couples de racines obtenus, si $x=AF$ et $y=FG$ rendent y'' négatif, le point G sera un *maximum* : si les coordonnées AH HI rendent y'' positif, I sera au contraire un *minimum*. 2.
Voy. les exemples IV et V.

Si les développemens de $f(a \pm h)$ étoient fautifs dans les termes auxquels on est forcé de recourir pour reconnoître les *maxima* ou *minima*, il faudroit chercher ces développemens, tels qu'ils doivent être (658), et voir s'ils sont en effet l'un et l'autre $>$ ou $< fa$. Ainsi $y = b + (x-a)^{\frac{5}{3}}$ donne

$$y' = \tfrac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}},\ y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{(x-a)}},$$

$y' = 0$ donne $x = a$ qui rend $y'' = \infty$: ainsi la formule de Taylor est fautive. Mais

$$f(a+h) = b + h^{\frac{5}{3}},\ f(a-h) = b - h^{\frac{5}{3}};$$

donc il n'y a ni *maximum* ni *minimum*. Au contraire, de $y = b + (x-a)^{\frac{4}{3}}$, on tire

$$f(a+h) = b + h^{\frac{4}{3}} = f(a-h);$$

donc $x = a$ et $y = b$ répondent à un *minimum*. On auroit un *maximum* pour $y = b - (x-a)^{\frac{4}{3}}$.

677. Quant aux fonctions de deux variables, $z = f(x,y)$, imitons les raisonnemens du n°. 676. Changeons x en $x + h$, et y en $y + k$, et développons comme n°. 663; en faisant $k = \alpha h$, nous aurons

$$Z = z + h\left(\frac{dz}{dx} + \alpha\frac{dz}{dy}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha\frac{d^2z}{dydx} + \alpha^2\frac{d^2z}{dy^2}\right)\ldots$$

or, pour qu'on ait toujours $Z < z$ ou $Z > z$, quelque petits que soient h et k, il faut que le second terme soit nul quel que soit α, d'où

$$\frac{dz}{dy} = 0 \text{ et } \frac{dz}{dx} = 0 \ldots\ldots (1);$$

mais en outre, le terme suivant doit être positif dans le cas du *minimum* et négatif pour le *maximum*. On éliminera donc x et y entre les équations (1), et leurs racines pourront seules convenir au but proposé : puis il faudroit les substituer dans le terme suivant

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha\frac{d^2z}{dxdy} + \alpha^2\frac{d^2z}{dy^2}$$

qui devroit être perpétuellement de même signe, quelque valeur qu'on attribue à α, et quel qu'en soit le signe. Or une quantité $A + 2\alpha B + \alpha^2 C$ ne peut conserver son signe quel que soit α, à moins que ses facteurs ne soient imaginaires (495, 139), ce qui exige que $AC - B^2 >$ soit o. Il faut donc qu'on ait

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{d^2y} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 > 0 \ldots \quad (2),$$

$\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ devront donc être de même signe; s'il est négatif, pour $k = 0$ notre trinome étant $= \frac{d^2z}{dx^2}$ et négatif, le trinome conserve toujours ce signe ; il y a donc *maximum* : il y a *minimum* quand $\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ sont positifs. Et si la condition (2) n'est pas remplie, ni l'un ni l'autre n'ont lieu.

Si les racines des équations (1) rendent nuls les termes de notre trinome, il faut recourir au 4e. terme du développement qui doit aussi être nul, puis au 5e., et ainsi de suite.

Quelle est, par exemple, la plus courte distance entre deux droites données? Nous prendrons l'une pour axe des x, l'autre ayant pour équations

$$z = ax + \alpha \quad y = bx + \beta.$$

Prenons sur la 1re. un point, dont x' soit l'abscisse : sa distance à un point quelconque de la seconde sera (601)

$$R^2 = (x - x')^2 + y^2 + z^2,$$

ou $$R^2 = (x - x')^2 + (bx + \beta)^2 + (ax + \alpha)^2.$$

Désignons ce 2e. membre par t, nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2(x - x') + 2(bx + \beta)b + 2(ax + \alpha)a = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x'} = -2(x - x') = 0, \text{ ou } x = x'.$$

Donc $x = -\dfrac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2}$. Puisque $x = x'$, la ligne cherchée est perpendiculaire à l'axe des x, et par conséquent elle l'est aussi à la 2e. droite qu'on auroit pu prendre pour cet axe : c'est ce qu'on sait déja (274). Du reste

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2} = 2(1 + a^2 + b^2), \quad \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x'^2} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x\mathrm{d}x'} = -2;$$

la condition (2) est satisfaite, puisque $(a^2 + b^2)\,4 > 0$, et il y a *minimum* parce que $\dfrac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2}$ est positif. La longueur de la ligne cherchée est $R = \dfrac{a\beta - b\alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. L'équation de sa projection sur le plan yz est $y = Az$, et comme elle passe par un point (xyz) de la 2e. droite,

$$A = \frac{bx + \beta}{ax + \alpha} = -\frac{a}{b};$$

donc ces lignes satisfont à la condition (618, 5°.) et sont perpendiculaires entre elles ; ce qu'on avoit déja prouvé.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

1. *Méthode des Tangentes.*

678. SOIT proposé de mener une tangente TM au 22.
point M (x,y) de la courbe BMM' dont l'équation est donnée $y = fx$: celle de la droite TM est

$$Y - y = \text{tang } \alpha \, (X - x),$$

X et Y étant les coordonnées variables de la droite et α l'angle T. Menons une sécante quelconque SMM' ; la tangente de l'angle $M'MQ$ ou S est $= \frac{M'Q}{MQ}$: désignons par k et h les accroissemens $M'Q$ MQ des coordonnées ; l'équation $y = fx$, donne

$$f(x + h) - fx \text{ ou } k = y'h + \tfrac{1}{2} y''h^2 + \text{etc.}$$

Donc tang $S = \frac{k}{h} = y' + \frac{1}{2} y''h +$ etc. Pour la tangente TM les deux points M et M' doivent être réunis en un (403) ; ainsi faisant $h = 0$, on trouve

$$\text{tang } \alpha = y' \text{ et } Y - y = y' \, (X - x),$$

pour l'équation de la tangente. Si pour le point M (a,b) de la courbe, on avoit $f\,(a + h) = b + Ah^{\alpha} + \ldots$ α étant < 1, on en tireroit $\frac{k}{h} = Ah^{\alpha - 1} + \ldots$ et faisant

$h=o$, tang $\alpha=\infty$: la tangente seroit perpendiculaire aux x. Donc, même lorsque la formule de Taylor est en défaut, y' détermine l'inclinaison de la tangente.

1°. La normale MN fait avec l'axe des x un angle (370) dont la tangente est $-\frac{1}{y'}$, son équation est

$$y'(Y-y)+X-x=o.$$

2°. En faisant $Y=o$, on a les abscisses AT AN des pieds de la tangente et de la normale; d'où on tire $x-X$, ou

$$\textit{sous-tangente } TP=\frac{y}{y'},\ \textit{sous-normale } PN=yy'.$$

Lorsque ces valeurs ont un signe négatif, cela indique que ces lignes tombent en sens opposé de celui de notre figure : il suffit alors d'examiner si c'est y ou y' qui est négatif pour reconnoître la situation de ces lignes.

3°. Les hypothénuses TM et MN donnent

$$\textit{tangente } TM=\frac{y}{y'}\sqrt{(1+y'^2)}$$
$$\textit{normale } MN=y\sqrt{(1+y'^2)}.$$

4°. Enfin $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)}}$ et $\sin\alpha=\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}$.

5°. En appliquant le raisonnement ci-dessus (V. n°. 420) au cas où l'angle des coordonnées est quelconque, on trouvera que l'équation de la tangente et la valeur de la sous-tangente restent lesmêmes.

Voici quelques exemples de ces formules.

I. Dans la parabole $y^2=2px$; d'où $y'=\frac{p}{y}$: ainsi $yy'=p$, $\frac{y}{y'}=2x$: la normale $MN=\sqrt{(2px+p^2)}$, (411).

II. Pour l'ellipse et l'hyperbole $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$, d'où $y' = \mp \frac{b^2x}{a^2y}$, (404 et 415).

III. Pour l'équation $y^m = x^n a^{m-n}$, on trouve....... $\frac{y}{y'} = \frac{mx}{n}$. La parabole en est un cas particulier; c'est ce qui a fait donner aux courbes renfermées dans cette équation le nom de *Paraboles*, m et n étant positifs. $y^3 = a^2x$ s'appelle la *première parabole cubique*; $y^3 = ax^2$ est la seconde.

De même on donne le nom d'*Hyperboles* aux courbes dont l'équation est $x^n y^m = a^{m+n}$; leur sous-tangente est $\frac{y}{y'} = -\frac{mx}{n}$; elle est la même, prise en sens contraire, que dans le cas précédent.

IV. Pour la courbe dont l'équation est $x^3 - 3axy + y^3 = 0$, on a

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}, \text{ sous-tang.} = \frac{y^3 - axy}{ay - x^2}, \text{ etc.}$$

V. Dans la logarithmique (468), $y = a^x$ donne.... $\frac{y}{y'} = \frac{1}{\log a}$; Ainsi la sous-tangente est égale au module (577).

VI. Soient $AP = x$, $PM = y$, $MQ = z = \sqrt{(2ry - y^2)}$, 23.
l'équation de la cycloïde AMF est $x = \text{arc}\ (\sin = z) - z$, (471) : l'arc est ici pris dans le cercle générateur MGD, dont le rayon $= r$. La dérivée est donc (652)

$$1 = \frac{rz'}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} - z', \text{ où } z' = \frac{(r - y)y'}{\sqrt{(2ry - y^2)}}.$$

Donc l'équation dérivée de la cycloïde est

$$yy' = \sqrt{(2ry - y^2)} \text{ ou } y' = \sqrt{\left(\frac{2r - y}{y}\right)}.$$

23. l'origine étant au point de rebroussement A.

Pour mener une tangente TM, on remarquera que

$$\text{sous-norm} = yy' = \sqrt{(2ry - y^2)} = z = MQ.$$

Ainsi la ligne MD menée au point de contact D du cercle générateur avec l'axe AE est la normale. La corde MD en est la longueur ; et on obtient en effet.......... $y\sqrt{(1+y'^2)} = \sqrt{(2ry)}$. La corde supplémentaire MG est la tangente. On voit donc que pour mener cette ligne, on décrira MN parallèle à l'axe AE, puis KF et enfin MG parallèle à KF.

Si l'origine étoit située au point le plus élevé F, en sorte qu'on prenne $FS = x$, $SM = y$, l'équation de la cycloïde seroit $x = \text{arc}\,(\sin = z) + z$, dont la dérivée est

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{2r - y}\right)}.$$

On auroit aussi trouvé cette équation en transportant l'origine en F, et changeant ci-dessus x en $\pi r - x$ et y en $2r - y$.

679. Lorsque l'équation et un point d'une courbe sont donnés, on sait y mener une tangente. On peut aussi résoudre un grand nombre de problêmes relatifs aux tangentes, tels que de les tracer par un point extérieur ou parallèlement à une droite donnée (*V.* n°s. 379, 2°. et 408), etc. Cherchons, par exemple, l'angle β formé par la tangente
24. TM, et le *Rayon Vecteur* AM mené de l'origine au point de contact $M\,(x, y)$. L'angle θ que ce rayon vecteur fait avec les x est connu, puisque $\tang \theta = \dfrac{y}{x}$; d'ailleurs $\tang \alpha = y'$; donc (370)

$$\tang(\alpha - \theta) \text{ ou } \tang \beta = \frac{y'x - y}{x + yy'}.$$

Pour l'équation $y^2+x^2=r^2$ qui appartient au cercle, on trouve $\tang\beta=\infty$, ce qui est d'ailleurs évident.

680. Lorsqu'une courbe BM est rapportée à des coor- 24.
données polaires $AM=r$, $MAP=\theta$, les formules précédentes ne peuvent servir qu'autant qu'on traduiroit préalablement l'équation $r=f\theta$ de la courbe en x et y à l'aide des équations (385)

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad x^2+y^2=r^2.$$

Au lieu de cela, on préfère transformer en r et θ les formules de sous-tangentes, etc.... Pour cela, il faut prendre θ pour variable indépendante au lieu de x, et mettre $\frac{y'}{x'}$ pour y, etc.... (653); puis faire

$$x'=r'\cos\theta-r\sin\theta,\quad y'=r'\sin\theta+r\cos\theta,$$

d'où $xx'+yy'=rr'$. Par exemple, la valeur de $\tang\beta$ deviendra d'abord $\frac{y'x-x'y}{x'x+y'y}$, puis

$$\tang\beta=\frac{r}{r'}.$$

On pourroit de même traduire en $r\,r'$ et θ les valeurs yy', $\frac{y}{y'}$, etc.; mais à cause de leur complication (653, 3°.), on préfère le procédé suivant. On nomme *Sous-tangente* la longueur de la partie AT, prise sur la perpendiculaire à AM: le point T étant ainsi déterminé, la tangente TM s'en suit. Or le triangle TAM donne $AT=AM\tang\beta$, où

$$\text{sous-tang}=AT=\frac{r^2}{r'}.$$

Pour la spirale d'Archimède (472) 25.

$$r=\frac{a\theta}{2\pi},\quad \frac{r^2}{r'}=\theta r,\quad \frac{r}{r'}=\theta.$$

25. Ainsi la sous-tangente AT est égale en longueur à l'arc de cercle décrit du rayon $AM=r$, et qui mesure l'angle $MAx=\theta$. Quant à l'angle β, il croît sans cesse ; et comme ce n'est qu'après une infinité de révolutions du rayon vecteur que θ devient infini ; l'angle droit est la limite de β.

Dans la spirale hyperbolique (473)

$$r=\frac{a}{\theta},\quad \text{sous-tang}=-a \quad \text{tang}\,\beta=-\theta;$$

ainsi la sous-tangente est constante : l'asymptote est la limite de toutes les tangentes ; enfin l'angle du rayon vecteur avec la tangente est obtus et décroît à mesure que θ augmente. *Voy.* dans le 1er. volume la fig. 260.

Pour la spirale logarithmique (474)

$$r=a^{\theta},\quad \text{tang}\,\beta=\frac{1}{\log a},\quad \text{sous-tang}=\frac{r}{\log a}.$$

La courbe coupe tous ses rayons vecteurs sous le même angle ; cet angle est de 50°, quand a est la base des logarithmes népériens : la sous-tangente croît proportionnellement au rayon vecteur.

2. *Des Rectifications et Quadratures.*

22. 681. Lorsque l'équation $y=fx$ d'une courbe BM' est donnée, la longueur $BM=s$ d'un arc est déterminée quand ses extrémités B et M le sont. Cherchons cette longueur. Pour cela, remarquons que B restant fixe, s varie avec le point M ; ainsi s est une fonction de $x=AP$ qu'il s'agit de trouver, $s=Fx$. Si x croît de $h=PP'$, on aura

$$P'M'=f(x+h)=y+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots$$
$$BM'=F(x+h)=s+s'h+\tfrac{1}{2}s''h^2+\ldots$$

Les accroissemens $QM'=k$ et arc $MM'=l$, de l'ordonnée et de l'arc BM, sont 22.

$$k=y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots,\quad l=s'h+\tfrac{1}{2}s''h^2+\ldots$$

Or, la corde $MM'=\sqrt{(h^2+k^2)}$, et mettant pour k sa valeur, il vient

$$\text{corde } MM'=h\sqrt{(1+y'^2+y'y''h+\ldots)}$$

D'un autre côté, la tangente MH donne

$$QH=y'h,\quad MH=h\sqrt{(1+y'^2)},\quad M'H=-\tfrac{1}{2}y''h^2\ldots$$

$$\text{donc}\quad \frac{\text{corde } MM'}{MH+M'H}=\frac{\sqrt{(1+y'^2+y'y''h+\ldots)}}{\sqrt{(1+y'^2)}-\frac{1}{2}y''h\ldots}.$$

Plus h décroît, plus ce rapport approche de l'unité; donc 1 est la limite de $\dfrac{\text{corde } MM'}{\text{arc } MM'}=\dfrac{\sqrt{(1+y'^2+y'y''h\ldots)}}{s'+\frac{1}{2}s''h\ldots}$, puisque l'arc MM' est compris entre sa corde et la ligne brisée $MH+M'H$; ainsi $1=\dfrac{\sqrt{(1+y'^2)}}{s'}$, d'où

$$s'=\sqrt{(1+y'^2)},\quad \text{ou}\quad ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}.$$

Cette formule sert à rectifier tous les arcs de courbe. On y met pour y' sa valeur $f'x$, et on obtient la dérivée de l'équation $s=Fx$; il faut ensuite *intégrer* $F'x$, c.-à-d. remonter de cette dérivée à sa fonction primitive. Nous donnerons bientôt (752) les moyens de faire ce calcul.

Le cercle dont le centre est à l'origine a pour équation $y^2+x^2=r^2$, d'où $yy'+x=0$, et

$$s'=\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}=\pm\frac{r}{y}=\frac{\pm r}{\sqrt{(r^2-x^2)}};$$

c'est la dérivée de l'arc de cercle s exprimée en fonction de

son sinus ou cosinus qui est x (*voy.* 652). Pour rectifier l'arc de cercle, il faudroit donc intégrer cette fonction (743).

D'après notre valeur de s' on peut simplifier les formules du n°. 678. On a

$$\text{tang}\,\alpha = y' = \frac{dy}{dx},\ \cos\alpha = \frac{1}{s'} = \frac{dx}{ds},\ \sin\alpha = \frac{y'}{s'} = \frac{dy}{ds},$$

$$\textit{tangente} = \frac{ys'}{y'} = \frac{yds}{dy},\quad \textit{normale} = ys' = \frac{yds}{dx}.$$

22. 682. Pour obtenir l'aire $BCMP = t$, imitons les raisonnemens précédens; nous verrons que t est fonction de x, ou $t = \varphi x$; que les accroissemens k et i de l'ordonnée et de l'aire pour l'abscisse $x + h$, sont

$$k = M'Q = y'h + \text{etc.}\quad i = MPP'M' = t'h + \ldots.$$

Or, les rectangles $MP' = yh$, $LP' = (y + k)h$ ayant l'unité pour limite de leur rapport $\frac{y}{y+k}$, 1 est aussi celle du rapport $\frac{yh}{i}$ entre le rectangle MP' et l'accroissement $MPP'M'$ de l'aire t. Ce rapport est

$$\frac{y}{t' + \frac{1}{2}t''h + \ldots} : \text{donc } \frac{y}{t'} = 1,\ \text{ou } t' = y.$$

Il faudra mettre ici fx pour y, et intégrer $t' = fx$. *Voyez* n°. 748.

Si les coordonnées faisoient l'angle α, on trouveroit $t' = y \sin\alpha$.

24. Cherchons l'aire $AKM = \tau$ comprise entre deux rayons vecteurs AM AK, dont le dernier demeure fixe, l'autre variant avec M. On a l'aire AKM, ou $\tau = ABMK - ABM$; mais

$ABM = ABCD + DCMP - AMP = ABCD + t - \frac{1}{2}xy$; 24.

donc $\quad \tau = ABMK - ABCD - t + \frac{1}{2}xy$.

Or, la variation du point M ne change pas les points B C et K; prenant donc la dérivée en regardant $ABMK$ et $ABCD$ comme constans, nous aurons

$$\tau' = -t' + \tfrac{1}{2}(xy' + y) = \tfrac{1}{2}(xy' - y).$$

Traduisons les valeurs de s' et τ' en coordonnées polaires r et θ; pour cela (653) mettons $\frac{s'}{x'} \frac{y'}{x'} \frac{\tau'}{x'}$ pour s' y' et τ', nous aurons

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 \quad \tau' = \tfrac{1}{2}(xy' - yx');$$

la variable principale étant maintenant quelconque, pour qu'elle soit θ, il suffit de mettre ici pour x, y; x' et y' les valeurs du n°. 680, et il viendra

$$s' = \sqrt{(r^2 + r'^2)} \quad \tau' = \tfrac{1}{2}r^2$$

qui sont les formules des rectifications et des quadratures de courbes rapportées à des coordonnées polaires $r = f\theta$; on auroit d'ailleurs pu les obtenir directement par la méthode des limites.

3. *Des Osculations.*

683. Si on prend un point M sur une courbe BMZ, et qu'on mène une tangente TM et une normale MN, puis des différens points a b..... de la normale, si on décrit des cercles qui passent en M, TM sera leur tangente commune. Or, il est clair que, par la disposition de ces cercles, les uns sont en dedans, les autres en dehors de la courbe, en sorte qu'il en est un qui 26.

26. approche plus que tout autre de la courbe BMZ de part et d'autre du point M. C'est ce qu'on nomme le *Cercle Osculateur;* son centre D et son rayon DM sont appelés *Centre* et *Rayon de courbure;* et, comme en changeant le point M, le cercle change aussi de centre et de rayon; on nomme *Développée* la courbe OD qui passe par tous les centres de courbure : la ligne donnée BMZ est la *Développante*.

Pour trouver le cercle osculateur d'une courbe en un point donné M, il faudroit exprimer en analyse les conditions qui le déterminent : mais nous généraliserons avant ces considérations. Concevons deux courbes qui auroient un point commun, leurs équations $y = fx$, $y = FX$ donneroient $y = Y$ pour la même abscisse $x = X$, qui est celle du point commun : jusqu'ici il n'y a qu'une simple intersection. Comparons le cours des deux lignes de part et d'autre de ce point, et pour cela mettons $x + h$ pour x et X, dans y et Y; les ordonnées correspondantes seront

$$y + y'h + \tfrac{1}{2}y''h^2 \dots \quad Y + Y'h + \tfrac{1}{2}Y''h^2 + \dots$$

d'où $\delta = h(y' - Y') + \frac{1}{2}h^2(y'' - Y'') + \text{etc.}$

pour la distance entre les deux points de nos courbes dont l'abscisse est $x + h$: il faut dans Y' Y''... remplacer X par x. Plus δ sera petit pour une valeur donnée de h, plus ces points correspondans seront voisins, de sorte que le degré de rapprochement de nos courbes dépend de la petitesse de δ dans une étendue déterminée de h.

Or, s'il arrive que la valeur de x, pour laquelle $y = Y$ rend aussi $y' = Y'$, on aura

$$\delta = \tfrac{1}{2}h^2(y'' - Y'') + \tfrac{1}{6}h^3(y''' - Y''') + \dots$$

nos deux courbes approcheront l'une de l'autre, plus que ne le feroit une 3e. qui, passant par le même point $(x\,y)$, ne rempliroit pas la même condition. Car, soit $\gamma = \varphi\xi$ l'équation de celle-ci, la distance Δ entre les points de cette courbe et de la 1re. qui ont pour abscisse $x+h$, est

$$\Delta = h\,(\gamma' - y') + \tfrac{1}{2}h^2\,(\gamma'' - y'') + \ldots$$

en supposant $\varphi x = fx$, pour qu'elles aient le point commun $(x\,y)$. Or, les valeurs de δ et Δ ont la forme

$$\delta = bh^2 + ch^3 + \ldots \quad \Delta = Ah + Bh^2 + Ch^3 \ldots$$

d'où $\Delta - \delta = Ah + (B - b)\,h^2 + (C - c)\,h^3 + \ldots$

Si donc on prend h assez petit (662) pour qu'on ait $A > (B - b)\,h +$ etc., Δ sera $> \delta$, et cela aura lieu pour toutes les valeurs de h moindres que celle-ci. Donc dans toute cette étendue de h, et de part et d'autre du point commun, la 1re. et la 2e. courbe approcheront plus l'une de l'autre que la 3e., quelle qu'en soit la nature.

Si, outre $y' = Y'$, on a aussi $y'' = Y''$, on verra de même que nos deux courbes approchent l'une de l'autre, dans les points voisins de celui qui est commun, plus qu'une 3^e. qui ne rempliroit pas ces deux conditions, et ainsi de suite. Nous dirons de deux lignes, qu'elles ont un *Contact ou une Osculation du* 1er. *ordre*, lorsqu'elles satisferont aux conditions $y = Y$, $y' = Y'$, pour la même abscisse x. De même $y = Y$, $y' = Y'$, $y'' = Y''$ seront les conditions *du contact du* 2e. *ordre*, etc.; et il est démontré que ces deux courbes sont plus proches l'une de l'autre, vers le point commun, qu'une 3e. courbe à moins qu'elle ne forme une semblable osculation.

Ces principes posés, si quelques-unes des constantes

$a\ b\ c$...... que renferment les équations $y = fx$, ... $Y = FX$ de deux courbes, sont arbitraires, la nature de ces lignes est fixée, mais leur position et même certaines dimensions ne le sont pas. On peut donc déterminer ces n constantes par un nombre égal de conditions $y = Y$, $y' = Y'$, $y'' = Y''$,.... et les courbes auront ainsi un contact du $(n-1)^e$ ordre : elles approcheront plus près l'une de l'autre que toute autre courbe qui ne formeroit pas une osculation de même ordre.

Appliquons ceci à la ligne droite : une courbe est donnée par son équation $y = fx$, dans laquelle aucune constante n'est inconnue. Prenons une droite dont la situation soit indéterminée, nos équations seront

$$y = fx \quad Y = aX + b$$

a et b étant quelconques. Si on pose $y = Y$ et $y' = Y'$, ou

$$y = ax + b \quad y' = a,$$

il y aura osculation du 1er. ordre, ou plutôt la droite sera tangente, puisqu'elle approchera de la courbe plus que toute autre droite ; car il faudroit sans cela que celle-ci remplît les mêmes conditions, c.-à-d., qu'elle eût les mêmes valeurs pour ses constantes. Ainsi y' est la tangente de l'angle que fait notre droite avec les axes ; éliminant a et b, l'équation de la droite est

$$Y - y = y'\ (X - x)$$

comme n°. 678. On tire aisément de là l'équation de la normale, la valeur de la sous-tangente, etc.

684. Raisonnons de même pour le cercle : les équations de la courbe donnée et d'un cercle considéré dans une situation quelconque sont

$$y = fx, \quad (Y-b)^2 + (X-a)^2 = R^2,$$

a et b sont les coordonnées du centre, R est le rayon. Nous établirons un contact du 2°. ordre pour déterminer ces trois constantes. Les dérivées de cette dernière équation sont

$$(Y-b)\,Y'+X-a=0,\quad (Y-b)\,Y''+Y'^2+1=0,$$

donc
$$(y-b)^2+(x-a)^2=R^2\ldots\ldots\ (1)$$
$$(y-b)\,y'+x-a=0\ldots\ldots\ (2)$$
$$(y-b)\,y''+y'^2+1=0\ldots\ldots\ (3)$$

éliminant $x-a$ et $y-b$ entre les deux dernières, on a

$$x-a=\frac{y'\,(1+y'^2)}{y''}\quad y-b=-\frac{1+y'^2}{y''};$$

d'où, en substituant dans la première (*)

$$R=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$a=x-\frac{y'}{y''}\,(1+y'^2),\quad b=y+\frac{1+y'^2}{y''};$$

On a donc ainsi le rayon et le centre de courbure. Tout autre cercle approchera moins de notre courbe que celui-ci, parce qu'il devroit pour cela remplir les mêmes conditions, c'est-à-dire, coïncider avec lui.

On voit que 1°. la tangente à la courbe l'est aussi au cercle osculateur, puisque y' a la même valeur pour l'une et l'autre.

(*) La valeur de R doit comporter le signe $\pm$; mais comme cette expression n'a de sens que lorsqu'elle est positive (330), on devra préférer celui de ces deux signes qui donnera à la valeur de R le signe $+$. Si y'' est positif, ce qui arrive lorsque la courbe tourne sa convexité vers l'axe des x, on prendra le signe $+$; il faudra préférer le signe $-$ dans le cas contraire. *V.* n°. 691.

2°. Si on met a et b pour X et Y dans l'équation de la normale (678, 1°.), elle est satisfaite, puisqu'on retrouve la relation (2), qui ne suppose qu'un contact du 1er. ordre entre la courbe et le cercle : donc *le centre de courbure est sur la normale*, ainsi que celui
26. de tout cercle qui a la même tangente TM.

3°. Si on élimine x et y entre l'équation $y = fx$ de la courbe et celles 2 et 3 qui déterminent a et b, on aura une relation entre les coordonnées du centre de courbure, quel que soit le point M ; ce sera donc l'équation de la développée.

4°. Puisque R a et b sont des fonctions de x, que le calcul détermine aisément, si on les substituoit dans les équations 1 et 2, elles seroient identiques ; on peut donc les différentier en regardant R a et b comme variables. Opérons d'abord sur l'équation (2) ; il vient

$$(y - b)\, y'' + y'^2 - b'y' - a' + 1 = 0,$$

d'où

$$b'y' + a' = 0$$

en retranchant de (3) : c'est, comme on devoit s'y attendre, la dérivée de l'équation (2) par rapport à a et b seuls. On a donc $-\frac{1}{y'} = \frac{b'}{a'}$ pour la tangente de l'angle que fait la normale avec l'axe des x ; mais la développée ayant pour équation $b = \varphi a$, sa tangente fait avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est $\frac{db}{da}$; dans notre calcul, nous avons regardé b et a comme des fonctions où x est variable principale (653). Donc $\frac{b'}{a'}$ est la valeur de cette tangente, ou de $-\frac{1}{y'}$; donc, *la normale à la développante est tangente à la développée.*

5°. Faisons la même chose pour l'équation (1), c.-à-d., prenons-en la dérivée en faisant tout varier, et ôtons le résultat de l'équation (2); ou plutôt prenons la dérivée de (1) relativement à a b et R. Il vient

$$-(y-b)\,b' - (x-a)\,a' = RR'.$$

Pour en tirer une relation qui appartienne à tous les points de la développée, il faut éliminer x et y. Mettons donc pour $x-a$ et $y-b$ leurs valeurs tirées de 1 et 2, après y avoir substitué $-\frac{a'}{b'}$ pour y'; on trouve

$$x-a = -\frac{y'R}{\sqrt{(1+y'^2)}} = \frac{a'R}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$$

$$y-b = \frac{R}{\sqrt{(1+y'^2)}} = \frac{b'R}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$$

donc $\frac{a'^2R+b'^2R}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}} = -RR'$ ou $R' = \sqrt{(a'^2+b'^2)}$.

Si on prend a pour variable principale, $R' = \sqrt{(1+b'^2)}$ est la dérivée du rayon de courbure relativement à a. Mais celle de l'arc s de la développée est aussi (681) $s' = \sqrt{(1+b'^2)}$; donc $R' = s'$, équation qui est la dérivée de $R = s + A$; A étant une constante arbitraire (710).

Pour un autre arc S de développée, le rayon de courbure est $S+A$, l'origine fixe de cet arc étant la même; ainsi $s-S$ est la différence des deux rayons. Il suit de là que si O et D sont les centres de courbure des 26.
points B et M, les arcs BM et OD de la courbe et de sa développée sont égaux. Si on courbe un fil sur la développée OD, et si on le tend suivant DM, en le déroulant de dessus OD, l'extrémité B décrira la développante BM.

6°. Les expressions du rayon de courbure et des coordonnées du centre se présentent sous diverses formes, suivant qu'on y prend telle ou telle variable pour indépendante. C'est ainsi qu'on a vu (n°. 654) qu'on a

$$R=\frac{x'}{y''}=-\frac{y'}{x''},\quad R=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''},$$

suivant que la variable principale est l'arc s, ou qu'elle est encore arbitraire. Si celle-ci est x, on peut écrire ainsi les valeurs de R a et b,

$$R=\frac{s'^3}{y''},\quad a=x-\frac{y's'^2}{y''},\quad b=y+\frac{s'^2}{y''}.$$

7°. Si les coordonnées sont polaires r et θ, on substituera pour x x'..... leurs valeurs dans celle de R où aucune variable n'est principale, x et y étant donnés en r et θ, par les formules n°. 680. On a, toutes réductions faites,

$$R=\frac{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2-rr''+r^2}=\frac{s'^3}{2r'^2-rr''+r^2}.$$

Appliquons cette théorie à quelques exemples.

26. I. Pour la parabole $y^2=2px$, $y'=\frac{p}{y}$, $y''=-\frac{p^2}{y^3}$; en substituant dans nos formules, on trouve

$$s'=\sqrt{\left(\frac{2x+p}{2x}\right)},\quad R=\frac{(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}=\frac{N^3}{p^2}$$

N étant la longueur de la normale (678, I). Donc *le rayon de courbure de la parabole est égal au cube de la normale, divisé par le carré du demi-paramètre : ce théorème a aussi lieu pour l'ellipse et l'hyperbole.* Au sommet A où $x=0$, on a $R=p$; ainsi la distance AI du som-

met à son centre de courbure, est le double de celle du foyer. Plus x croît, plus la courbure diminue, et cela indéfiniment. Les coordonnées du centre de courbure sont

$$a = 3x + p \quad b = -\frac{2xy}{p}$$

éliminant x et y de $y^2 = 2px$, on a

$$b^2 = \frac{8}{27p}(a-p)^3$$

pour équation de la développée. En transportant l'origine au point I on trouve $b^2 = \dfrac{8a^3}{27p}$; c'est la seconde parabole cubique. Nous apprendrons bientôt à la discuter.

II. Pour la cycloïde on a (678, VI). 23.

$$y' = \sqrt{\left(\frac{2r-y}{y}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2r}{y} - 1\right)}, \; y'' = -\frac{r}{y^2}$$

d'où $$s'^2 = \frac{2r}{y} \text{ et } R = 2\sqrt{(2ry)}.$$

Le rayon de courbure étant double de la normale, prolongeons MD et prenons $M'D = MD$, M' sera le centre de courbure ; il seroit aisé de déduire de là la figure de la développée, mais nous préférerons suivre la méthode générale, qui donne

$$a = x + 2\sqrt{(2ry - y^2)}, \; b = -y$$

pour éliminer x et y, comme l'équation de la cycloïde est une dérivée, nous prendrons celles de a et b,

$$a' = \frac{2r-y}{y}, \quad b' = -y'$$

Divisant ces valeurs on a $\frac{b'}{a'} = \frac{-yy'}{2r-y} = -\sqrt{\frac{y}{2r-y}}$; puis mettant $-b$ pour y, $\frac{b'}{a'} = -\sqrt{\frac{-b}{2r+b}}$. Or, si on prend les ordonnées positives en sens contraire, il vient $\frac{b'}{a'} = \sqrt{\frac{b}{2r-b}}$, qui est précisément l'équation de la même cycloïde lorsque l'origine est en F. Donc la développée de la cycloïde est une cycloïde égale, mais dont l'axe est parallèle à AE et le sommet situé en A.

III. Dans la spirale logarithmique

$$r = a^{\theta} \quad \text{d'où} \quad R = r\sqrt{(1+\log^2 a)}$$

25. mais la tangente de l'angle $AMN = \eta$ du rayon vecteur avec la normale est $= \log a$ (680) ; d'où .... $R = r \sec \eta = \frac{r}{\cos \eta}$. La projection du rayon de courbure MN sur le rayon vecteur étant $= r$, on voit que la perpendiculaire AN élevée sur celui-ci au pôle, rencontre la normale au centre de courbure. AM est donc la sous-tangente de la développée et AN son rayon vecteur, qui forme le même angle β avec la courbe en chaque point que la spirale logarithmique proposée. Donc la développée est cette même courbe placée en sens différent.

On appliqueroit de même la théorie des osculations à des courbes d'un ordre plus élevé. (*Voy. Fonct. anal.* n°. 117), et il est visible que deux courbes qui ont un contact du 3e. ordre, ont même tangente et même cercle osculateur.

La différence entre les ordonnées des deux courbes étant $\delta = Mh^m + Nh^{m-1} + \ldots$, suivant que Mh^m est positif ou négatif, comme le signe de δ est celui de ce terme quand

h est très-petit, l'ordonnée de la courbe est plus grande ou moindre que celle de son osculatrice : ce qui fait juger si la 1re. est en-dessus ou en-dessous de l'autre. Mettant $-h$ pour h, le signe Hh^m changera lorsque m sera impair, et la courbe sera coupée par son osculatrice au point commun. On voit donc qu'*une courbe est toujours coupée par son cercle osculateur*.

4. *Des Asymptotes.*

685. Si le développement de $f(x+h)$ est fautif, alors on ne peut établir une osculation, qu'autant que celui de $F(x+h)$ pourroit procéder suivant la même loi, du moins dans l'ordre des 1ers. termes qu'on doit comparer : cette condition dépend de la nature des fonctions fx et Fx, et ne peut avoir lieu qu'accidentellement ; le même raisonnement exige alors qu'on égale les divers coefficiens pour qu'il y ait osculation. *V. Fonct. analy.* n°. 120.

Soient $y=fx$, $y=Fx$ les équations de deux courbes ; supposons qu'on ait développé fx et Fx en séries suivant les puissances descendantes de x, en sorte que chacune de ces fonctions soit mise sous la forme (*)

$$Ax^{a}+Bx^{a-b}+\ldots+Mx^{-m}+Nx^{-m-n}+\ldots$$

si les exposans de ces deux développemens sont les mêmes jusqu'à un certain terme Mx^{-m}, et qu'on puisse disposer de quelques constantes pour rendre aussi leurs coefficiens

(*) Pour cela on changera x en $\frac{1}{z}$ dans $y=fx$, puis on développera suivant les puissances ascendantes de z par le théorème de Maclaurin ; et s'il ne peut être appliqué, on usera du procédé n°. 669, en faisant $y=x\cdot z$, ou de la méthode du n°. 658.

égaux sans introduire d'imaginaires, la différence entre deux ordonnées quelconques sera $M'x^{-m} + \ldots$ Il suit de là que l'une de nos courbes ira en s'approchant continuellement de l'autre, à mesure que x croîtra, mais sans jamais l'atteindre : et il y aura un terme passé lequel aucune autre courbe, qui ne rempliroit pas ces conditions, ne pourra en approcher davantage. Nos courbes sont donc des *Asymptotes* l'une de l'autre.

Ainsi, *quand une courbe s'étend indéfiniment, elle a une infinité d'asymptotes* qu'on trouve en développant $y = fx$ en série descendante et prenant pour ordonnée de la ligne cherchée, la somme des 1[ers]. termes, jusqu'à un rang quelconque dont l'exposant soit négatif ; ou bien en composant une fonction Fx dont le développement commence par ces termes.

I. Par exemple pour l'hyperbole

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)} = \pm\frac{bx}{a} \mp \tfrac{1}{2}\, bax^{-1} + \ldots$$

Donc les droites qui ont pour équations $y = \pm\frac{bx}{a}$, sont les asymptotes rectilignes, et jouissent seules de cette propriété, en sorte qu'aucune autre droite ne peut aussi l'être.

Il en est de même de $x = 0$ et $y = 0$, pour $xy = m^2$.

II. La courbe dont l'équation est $y = \frac{k}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$ est formée de quatre branches symétriques par rapport aux axes, et dont nous pourrons bientôt trouver la figure. On a

$$y = kx^{-1} + \text{etc.} \quad x = a + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{a}y^{-2} + \ldots$$

suivant qu'on forme le développement, suivant les puissances de x ou de y. Les droites qui ont pour équations $y = 0$ et $x = a$, sont donc des asymptotes. L'hyperbole qui a les axes pour asymptotes, et k pour puissance l'est aussi ; mais le rapprochement est ici beaucoup plus grand.

III. Soit $y^3 - 3axy + x^3 = 0$, d'où (669) 27.

$$y = -x - a - a^2 x^{-1} - \dots$$

la droite qui a pour équation $y = -x - a$ est donc une asymptote ; elle se construit en prenant $AB = AC = a$, et tirant BC.

Mais si on prend les trois 1ers. termes on a.......... $xy + x^2 + ax + a^2 = 0$; l'asymptote courbe dont il s'agit ici est une hyperbole LIM, dont le centre est en C, ses asymptotes étant FC, Cy ; $AD = a$, $DI = \frac{1}{2}a$ donnent I pour un de ses points (457) : il sera facile d'achever la construction. Cette courbe approchera bien plus de la proposée, que ne le fait la droite FC. L'autre branche AN offre une construction semblable, qu'on obtient en développant x en y.

IV. Soit enfin $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0$. 28.
la méthode du n°. 669 donne

$$y = \pm px \pm \frac{a(3\sqrt{2} - 4)}{8p} + Ax^{-1} + \dots$$

p désignant $\sqrt{(1 + \sqrt{2})}$. Donc en construisant les droites GF GH qui ont pour ordonnées ces deux 1ers. termes, on aura les asymptotes rectilignes de la courbe proposée.

5. *Des Points multiples et conjugués.*

686. Lorsque les branches d'une courbe passent par un même point, soit en se coupant, soit en se touchant, ce point est appelé *double*, *triple* ... *multiple* suivant qu'il est commun à deux, trois, ... ou plusieurs branches. Etant donnée l'équation d'une courbe, proposons-nous de déterminer ces points, si elle en a, et leur nature.

Soient $V = 0, \quad My' + N = 0$

l'équation en x et y de la courbe et sa dérivée : on suppose V délivré de radicaux.

1er. *cas.* Si les branches de la courbe se coupent au point cherché, il y a plusieurs tangentes en ce point; ainsi pour une valeur de x et celle correspondante de y, y' doit avoir autant de valeurs qu'il y a de branches. Or on a vu (660) que cette condition rend M et N nuls.

2e. *cas.* Si les branches de la courbe se touchent, il n'y a qu'une valeur de y' : et même si le contact est du n^e. ordre, il n'y aura qu'une valeur de......... y' y'' ... $y^{(n-1)}$ (683) : mais on devra en trouver plusieurs pour $y^{(n)}$. Or l'équation dérivée de l'ordre n, a la forme $My^{(n)} + \ldots = 0$, M étant ici le même coefficient que pour y', y'', ... dans les dérivées successives, ou $\frac{dV}{dy}$ (641) : et comme cette équation est exempte de radicaux, elle ne peut donner plusieurs valeurs de $y^{(n)}$ pour une seule de x et de y : on a donc encore $M = 0$, et par conséquent $N = 0$.

Concluons de là que *pour trouver les points multiples d'une courbe, on égalera à zéro les dérivées* M *et* N *de son équation* V = 0, *prises tour-à-tour par rapport à* y

seul et à x *seul. Puis éliminant* x *et* y *entre deux de ces équations*

$$M = 0 \quad N = 0 \quad V = 0 \ldots \quad (1)$$

les valeurs réelles qui satisferont à la 3ᵉ. *pourront seules appartenir aux points multiples.*

Je dis *pourront appartenir*, parce que la réciproque de cette proposition n'est pas vraie, ainsi qu'on va le voir. On passera à la dérivée du 2ᵉ. ordre (641)..., $My'' + Py'^2 +$ etc. $= 0$, et prenant l'un des couples de valeurs de x et y qu'on vient de trouver, on les substituera ici : y'' disparoîtra, et y' sera donné par une équation du 2ᵉ degré. Si les racines sont réelles, il y aura *un point double* et les deux tangentes à ces branches seront déterminées par ces valeurs de y'.

687. Mais si elles sont imaginaires, il y aura un point sans tangente, et par conséquent tout-à-fait isolé des branches de la courbe ; c'est ce qu'on nomme *un point Conjugué*. En effet, s'il y a un tel point pour l'abscisse a, les ordonnées voisines doivent être imaginaires ; mettant $a \pm h$ pour x dans $V = 0$, la valeur de y ou $f(a \pm h)$ sera imaginaire, pour h très-petit. Soit donc $y^{(n)}$ la 1ʳᵉ. dérivée de ce développement qui soit dans ce cas, il est clair que l'équation $My^{(n)} +$ etc. $= 0$, ne peut la présenter sous cette forme, puisqu'elle ne contient pas de radicaux, même après en avoir éliminé $y'\ y'' \ldots y^{(n-1)}$. Il faut donc que $M = 0$, et par suite $N = 0$.

Ainsi les points conjugués sont compris parmi ceux que donnent les équations (1) ; mais on les distingue, en ce que la courbe n'y peut avoir de tangente : y' doit être imaginaire, x et y étant réels.

688. Il pourroit arriver que tous les termes de la dérivée du 2ᵉ. ordre disparussent : alors il faudroit recourir

à celle du 3e., d'où y''' et y'' s'en iroient, et qui contiendroit y' au 3e degré. Il y auroit *un point triple* si les trois racines étoient réelles; mais si deux étoient imaginaires, il n'y auroit pas de point multiple.

Si on étoit forcé de recourir à l'équation du 4e. ordre, où y' est au 4e. degré, il y auroit *un point quadruple*, *double* ou *conjugué*, suivant que les quatre racines seroient réelles, ou que deux seroient imaginaires, ou qu'enfin aucune ne seroit réelle: et ainsi de suite

689. Voici quelques exemples.

I. Soit $ay^3 - x^3y - bx^3 = 0$; d'où

1°.... $(3ay^2 - x^3)y' - 3x^2(y+b) = 0$

2°.... $6ayy'^2 - 6x^2y' - 6x(y+b) = 0$

3°.... $6ay'^3 - 12xy' - 6y - 6b = 0$

nous avons omis les termes en y'' y'''... qui disparoitroient par la suite du calcul. On a

$$3ay^2 - x^3 = 0 \quad x(y+b) = 0$$

on en tire $y = -b$ et $x = \sqrt[3]{(3ab^2)}$, qui ne satisfont pas à la proposée; et $x = 0$, $y = 0$: l'origine peut donc être un point multiple. Mais tous les termes de la dérivée du 2e. ordre disparoissent; celle du 3e. devient... $ay'^3 = b$, qui ne donne pour y' qu'une seule racine réelle; donc notre courbe n'a pas de point multiple.

II. Prenons $y^4 - x^5 + x^4 + 3x^2y^2 = 0$

d'où,... $2yy'(2y^2 + 3x^2) + 4x^3 - 5x^4 + 6y^2x = 0$

en posant $y(2y^2 + 3x^2) = 0$, $x(4x^2 - 5x^3 + 6y^2) = 0$ on trouve que $x = 0$ et $y = 0$, peuvent seules remplir ces conditions et satisfaire à la proposée. Les dérivées du 2e. et 3e. ordre sont par là nulles d'elles-mêmes; celle

du 4e devient $y'^4 + 3y'^2 + 1 = 0$, dont les racines sont imaginaires; ainsi l'origine est un point conjugué.

III. Pour $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$ 29.

on a $$-6a(y + a)yy' + 4x(x^2 - a^2) = 0$$
$$-3a(2y + a)y'^2 + 6x^2 - 2a^2 = 0.$$

Voici comment on trouvera la figure de la courbe, qui d'ailleurs est symétrique par rapport à l'axe des y, puisque x n'entre dans la proposée qu'avec des puissances paires. On fera $$(y + a)y = 0 \qquad x(x^2 - a^2) = 0$$
et combinant toutes les racines de ces équations avec la proposée, on trouve qu'il ne peut y avoir que trois points multiples, savoir :

en D et D', où $y = 0$ et $x = \pm a$
et en E où $x = 0$ et $y = -a$.

On verra bientôt que ces points sont doubles, et que les tangentes Ec Ef Da Db... font avec Ax des angles qui ont pour tangentes $\sqrt{\frac{2}{3}}$ pour le point E, et $\sqrt{\frac{4}{3}}$ pour D et D'.

Pour les points où la tangente est parallèle aux x, on fera $y' = 0 = x(x^2 - a^2)$; 1°. $x = 0$ répond à $y = -a$ et $y = \frac{1}{2}a$: ce qui redonne le point E pour lequel y' est $\frac{0}{0}$, et non pas $= 0$; on trouve aussi le *maximum* en F. 2°. $x = \pm a$, donne, outre les points D et D', les *minima* O et H pour lesquels $y = -\frac{3}{2}a$.

Enfin $y' = \infty$, ou $y(y + a) = 0$, fera connoître les points F et G où la courbe a sa tangente parallèle aux y : on a $AB = AC = D'E$.

IV. Soit encore $x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0$ 30.

d'où... $$ay'(2x^2 - 3y^2) + 4x(x^2 + ay) = 0$$

Après avoir trouvé que l'origine peut seule être un point

30. multiple, on est conduit à la dérivée du 3e. ordre qui donne $y' = 0$ et $y' = \pm\sqrt{2}$. Ainsi en A il y a un point triple; la courbe a pour tangentes l'axe des x et les lignes Ab Ac.

On aura les *minima* H et O en faisant $y' = 0$ ou $x(x^2 + ay) = 0$, d'où $y = -a$ et $x = \pm a$. Enfin les limites G et F se trouvent en posant $y' = \infty$ ou $2x^2 = 3y^2$, d'où $x = \pm \frac{4}{9} a\sqrt{6}$ et $y = -\frac{8}{9} a$.

31. V. L'équation $y^4 - axy^2 + x^4 = 0$ donne

1°....... $2yy'(2y^2 - ax) + 4x^3 - ay^2 = 0$

2°....... $2(6y^2 - ax)y'^2 - 4ayy' + 12x^2 = 0$

3°....... $24yy'^3 - 6ay'^2 + 24x = 0$.

On trouve que l'origine est un point triple, et comme on a $y' = 0$ et $y' = \infty$, les axes sont tangens à la courbe.

32. VI. On pourra s'exercer sur l'équation............. $y^4 + x^4 - 3ay^3 + 2bx^2y = 0$; la courbe a aussi un point triple à l'origine. *Voy.* encore l'exemple 685, IV, fig. 28.

690. Lorsque l'équation est explicite, la recherche des points multiples est bien plus aisée: on a vu, p. 248, que l'abscisse correspondante doit chasser un radical de la valeur de y, en rendant nul son coefficient. Le degré de ce radical dépend du nombre de branches, et l'exposant du coefficient détermine s'il y a simple intersection ou osculation.

33. C'est ainsi que $y = (x-6)\sqrt{(x-3)} + 3$, perd un radical lorsque $x = 6$, qui ne disparoît pas dans y': on en conclut que $AC = 6$, $CD = 3$, donnent en D un point double, pour lequel les branches se coupent. D'ailleurs $AP = 4$, donne en M et N les *maxima*; $AB = 3$ fixe la limite BE.

Il y a un point conjugué à l'origine pour.......

$y = x\sqrt{(x-b)}$, parce que y est imaginaire pour les points voisins, et que $y=0$ lorsque $x=0$.

Enfin $y=(x-a)^2\sqrt{(x-b)}+c$ est l'équation de la courbe *EDFG* formée de deux branches qui ont en *D* la même tangente *ED*. Si $x-a$ eût été au cube, les deux branches auroient eu même cercle osculateur, etc.... Du reste, un point triple, quadruple,.... est annoncé par un radical du 3e., 4e. degré. 34.

6. *De la Concavité et de la Convexité des Courbes; des Points singuliers.*

691. On peut employer les situations diverses de la tangente à la recherche de la figure des courbes (408, 413). Comparons les ordonnées d'une courbe et de sa tangente au point (x, y), pour la même abcisse $x+h$; elle sont (678) 22.

$$P'H = y + y'h,\ f(x+h) = P'M' = y + y'h + \tfrac{1}{2}y''h^2 + \ldots$$

$y=fx$ étant l'équation de la courbe. Comme on peut prendre h assez petit pour que le signe de $\frac{1}{2}y''h^2$ soit celui de $\frac{1}{2}y''h^2 +$ etc., on voit que l'ordonnée de la courbe est plus grande ou plus petite que celle de la tangente, suivant que y'' est positif ou négatif; en sorte que la courbe tourne vers l'axe des x, sa convexité dans le 1er. cas, et sa concavité dans le 2e. Si les ordonnées étoient négatives, ce seroit visiblement le contraire; donc *une courbe tourne vers l'axe des* x *sa convexité ou sa concavité, suivant que* y *et* y'' *sont de même signe ou de signe contraire.*

Il est aisé de voir qu'au point d'*Inflexion M*, où la courbe change sa concavité en convexité, y'' doit aussi changer de signe; ce qui exige qu'en ce point y'' 39 et 40.

soit nul ou infini. C'est, au reste, ce qui va être développé.

692. Après avoir pris un point M (α,β) sur notre courbe, pour juger s'il présente quelque particularité, c.-à-d., s'il est *Singulier*, il faut comparer le cours de la courbe de part et d'autre de ce point, où l'ordonnée est $f(\alpha \pm h)$. Il faut examiner deux cas.

Ier. CAS. *Le développement de* f $(\alpha+$h$)$ *ne contenant pas d'exposant fractionnaire dont le dénominateur soit pair*, on a

$$f(\alpha+h)=\beta+Ah^a+Bh^b+\ldots.$$

Les coefficiens sont réels, puisque, s'ils étoient imaginaires, le point (α,β) seroit conjugué (687). De plus, quel que soit le signe de h, $h^a\,h^b$..... sont réels, en sorte que la courbe s'étend de part et d'autre du point (α,β).

1°. Si le développement de $f(\alpha+h)$ est fautif dès le 2e. terme Ah^a, ou si a est une fraction $\frac{m}{n}>0$ et <1, y' est infini, et la tangente est perpendiculaire aux x, (678). En prenant les dérivées relatives à h, on a

$$f'(\alpha+h)=\frac{m}{n}Ah^{\frac{m}{n}-1}+\text{etc.}$$

$$f''(\alpha+h)=-\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)Ah^{\frac{m-2n}{n}}+\text{etc.};$$

la valeur de $f'(x+h)$ est destinée à donner la direction de la tangente en un point quelconque de la courbe; pour $x=\alpha$, cette valeur est celle que nous venons de trouver pour $f'(\alpha+h)$. *Voyez* note p. 251. On en dira autant de $f''(\alpha+h)$.

Cela posé, le signe de Ah^a et de ses dérivées, décide de celui de la série entière, lorsque h est très-petit. n étant impair, si m l'est aussi, l'ordonnée $f(\alpha+h)$ croît d'un côté et décroît de l'autre de l'ordonnée tangente, parce que $A\sqrt[n]{h^m}$ change de signe avec h. Il y a donc une *inflexion* disposée comme le montrent les figures 35 et 36, suivant que A est positif ou négatif. 35 et 36.

On remarquera qu'en effet $f''(\alpha+h)$ change aussi de signe avec h, parce que l'exposant $m-2n$ de h dans le 1er. terme, est impair : ainsi la courbe présente d'un côté sa concavité, et de l'autre sa convexité, à l'axe des x (691). Nous avons construit les équations

$$y=\beta+(x-\alpha)^{\frac{3}{5}}\ldots \text{ fig. } 36$$

$$y=\beta-(x-\alpha)^{\frac{3}{5}}\ldots \text{ fig. } 37.$$

On en dira autant pour $y^3=a^2x$ et $(y-1)^3=1-x$.

Mais si m est pair, $\sqrt[n]{h^m}$ a toujours le même signe que A, quel que soit celui de h, en sorte que les ordonnées voisines de notre tangente de part et d'autre, croissent lorsque A est positif, et décroissent dans le cas contraire ; à-peu-près comme pour les *maxima*. La courbe prend la forme indiquée fig. 37 et 38, que nous appellerons *Cératoïde* (*). Le signe de $f''(\alpha+h)$ est visiblement négatif pour l'un, et positif pour l'autre, en sorte que la courbe doit présenter à l'axe des x des deux côtés de l'ordonnée tangente, sa concavité ou sa convexité, suivant que A a le signe $+$ ou le signe $-$. 37 et 38.

(*) Nous avons préféré les dénominations de *Cératoïde* et *Ramphoïde* à celles de rebroussement de la 1re. et de la 2e. espèce sous lesquelles ces points sont connus. Ces mots sont dérivés de Κέρας *corne*, Ῥάμφος *bec d'oiseau*, Εἶδος *forme*.

Les équations $y = \beta - (x - \alpha)^{\frac{2}{3}}$ et $y = \beta + (x - \alpha)^{\frac{2}{3}}$ donnent les fig. 37 et 38. On en trouve un autre exemple dans la Cycloïde.

2°. Mais si le développement n'est pas fautif dans les deux 1ers. termes ; $a = 1$, y' n'est plus infini, et on a A pour la tangente de l'angle que fait avec l'axe des x la droite qui touche la courbe au point (α, β) : elle est parallèle aux x, si $A = 0$; inclinée à 50°, si $A = 1$, etc. On a $b > 1$, et

$$f(\alpha + h) = \beta + Ah + Bh^b + \ldots.$$
$$f' (\alpha + h) = A + bBh^{b-1} + \ldots..$$
$$f'' (\alpha + h) = b(b-1) Bh^{b-2} + \ldots..$$

D'après cela, si le plus petit exposant b' est un nombre pair, ou une fraction dont le numérateur soit pair, la courbe ne présente au point (α, β) rien de particulier, puisqu'elle s'étend de part et d'autre au-dessus de la tangente si B est positif, et au-dessous si B est négatif ; la différence entre les ordonnées de ces deux lignes étant $Bh^b +$ etc. On voit d'ailleurs qu'alors le signe de $f'' (\alpha + h)$ est le même que celui de B.

C'est ce qui a lieu pour l'équation $y = \beta + ax^2 + (x - \alpha)^{\frac{4}{3}}$. Cependant si $A = 0$, il a *maximum* ou *minimum* : *Voy*. p. 284. Cela arrive pour $y = \beta + k(x - \alpha)^{\frac{4}{3}}$.

39 et 40. Mais si b est un nombre impair ou une fraction $\frac{m}{n}$, dont le numérateur m soit impair, Bh^b ou $B\sqrt[n]{h^m}$, change de signe avec h, en sorte que les ordonnées croissent d'un côté et décroissent de l'autre : de plus, $f'' (\alpha + h)$ est dans le même cas, puisque l'exposant de son 1er. terme est aussi un nombre impair $b - 2$, ou

une fraction dont le numérateur $m - 2n$ est impair : donc il y a une *inflexion* au point (α,β), dont la disposition dépend de la direction de la tangente, et du signe de B. Voici plusieurs exemples :

1°. $y = x + (x-\alpha)^3$; 2°. $y = \frac{1}{2}x + (x-\alpha)^{\frac{5}{3}}$; 39.

3°. $y = x + (x-\alpha)^3$; 4°. $y = -(x-\alpha)^{\frac{5}{3}}$; 40.

5°. $y = -x + (x-\alpha)^{\frac{7}{3}}$; 43.

la tangente est inclinée à 50° dans les exemples 1 et 3 ; à 150° dans le 5e. ; elle est parallèle aux x dans le 4°.

Si b est entier (c.-à-d., 3, 5, 7....), y'' est nul ; on pourra rapprocher notre théorème de celui des *maxima* (676). Chacune des racines de $y''=0$ ne peut répondre à une inflexion, qu'autant que la 1re. des dérivées y''' y^{IV}... qu'elle ne rend pas nulle, est d'ordre impair. Si b n'est pas entier comme il est > 1, y'' est nul ou infini, suivant que b est $>$ ou < 2.

IIe. CAS. *Le développement de* f $(\alpha + \text{h})$ *contenant un radical pair*, l'une des ordonnées $f(\alpha+h)$ ou $f(\alpha-h)$ est imaginaire, l'autre est double à cause du radical pair qui y introduit le signe $\pm$. Ainsi, la courbe ne s'étend que d'un côté de l'ordonnée β, et elle a deux branches.

1°. Si le développement est fautif dès le 2e. terme, a est entre 0 et 1, l'ordonnée β est tangente. Si $a = \dfrac{m}{n}$, 41.

n étant pair, le terme $\pm A\sqrt[n]{h^m}$ montre que le point (α,β) est une *Limite* de la courbe dans le sens des x ; elle a la forme NMQ ou $N'M'Q'$, suivant que h doit être pris en $+$ ou en $-$; l'une des ordonnées est $> \beta$, l'autre est $< \beta$ ou PM : d'ailleurs pour les points voisins

41. de M, l'une des valeurs de $f''(\alpha+h)$ est positive ; l'autre est négative, ce qui prouve que l'une des branches NM est concave, et que l'autre QM est convexe vers l'axe des x.

Les équations $y=k+x\pm(x-\alpha)^{\frac{3}{4}}$, et.... $y=k+x\pm(\alpha-x)^{\frac{3}{4}}$ donnent l'une QMN, l'autre $Q'MN'$. Nous en avons trouvé plusieurs exemples (689).

42. Mais si le radical pair affecte un des termes qui suivent Ah^a, pour les ordonnées voisines de celle qui est tangente, β est $> f(\alpha+h)$ quand A est positif; le contraire a lieu lorsque A est négatif : en sorte que les branches de courbe ont la forme QMN dans un cas, $Q'MN'$ dans l'autre. On voit d'ailleurs qu'alors $f''(\alpha+h)$ étant de signe contraire à A, la courbe doit affecter cette figure, que nous nommerons une *Ramphoïde*. C'est ce qui a lieu pour $y=\beta+k(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}+l(x-\alpha)^{\frac{1}{4}}$.

Si h doit être négatif, pour que $f(\alpha+h)$ soit réel, la courbe est à gauche de l'ordonnée tangente PM.

2°. Si le développement n'est fautif qu'au-delà du 2e. terme, $a=1$ et la tangente à la courbe au point (α,β) sera facile à construire. Si le terme Bh^b porte le radical pair, il a la forme $\pm B\sqrt[n]{h^m}$; l'une des branches
45. est au-dessus de la tangente, l'autre s'abaisse au-dessous, puisque cette droite a pour ordonnée $Y=\beta+Ah$: il y a donc une *Cératoïde*. On a y'' nul ou infini, suivant que b est $>$ ou <2. L'équation $y=\beta+x+(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}$ est construite fig. 45. La tangente est inclinée à 50° : on a décrit aussi la courbe dont l'équation est

44. $$2y=-1-x+2(1-x)^{\frac{5}{2}}.$$

Mais si l'exposant dont le dénominateur est pair est au-delà de Bh^b, le signe de B suffit pour décider quelle est la plus grande de l'ordonnée de la courbe, ou de celle $\beta + Ah$ de la tangente. On voit donc qu'il y a une *Ramphoïde*. On donne ici les courbes dont les équations sont 46.

$y = \beta + x + ax^2 + b\sqrt{x^5}$ .... en QMN 46.
$y = \beta + x - ax^2 + b\sqrt{x^5}$ .... en $Q'MN'$.

693. Concluons de là que 1°. aux limites dans le sens des x ou des y, y' est nul ou infini;

2°. Aux inflexions et aux cératoïdes, y'' est nul ou infini;

3°. Pour trouver les points singuliers, il faut prendre la dérivée $My' + N = 0$ de l'équation $\varphi(x, y) = 0$ de la courbe; faire $M = 0$ ou $N = 0$; en tirer, à l'aide de $\varphi(x, y) = 0$, les racines qui *peuvent seules* appartenir aux limites;

4°. Prendre de même la dérivée du 2°. ordre, ou celle de $y' = -\frac{M}{N}$, qui donne $y'' = \frac{Q}{N}$, (1re. règle, n°. 632), puis faire $Q = 0$, ou $N = 0$;

5°. Il faudra ensuite chercher le développement de $f(x+h)$ pour chacune des valeurs de x ainsi obtenues, ou plutôt reconnoître le cours de la courbe de part et d'autre du point qu'elles déterminent;

6°. Les ramphoïdes et les cératoïdes peuvent être considérées comme des points multiples et soumis à la même analyse : elles ont une tangente commune à leurs deux branches au point de rebroussement;

7°. On peut encore, dans la discussion des équations, s'aider du développement de y en série ascendante ou

descendante (669) suivant les puissances de x; on aura aisément leurs limites si elles en comportent, et, pour les branches infinies, on obtiendra leurs asymptotes courbes ou droites, etc. Outre les exemples assez nombreux que nous avons donnés, on en trouvera beaucoup d'autres dans le Traité de *Cramer*. Nous proposerons encore les suivans :

41. $y=x+\sqrt[4]{(x-1)}$ $\qquad y=x^2+\sqrt{(x-2)}$

45. $y=x+\sqrt{(x-1)^3}$ $\qquad y=x^3+\sqrt{x^3}$

46. $y=x^2+\sqrt{(x-1)^5}$ $\qquad y=ax^2+\sqrt{x^5}$

24. $y=\sqrt[3]{x^8}+\beta x$ $\qquad y=\sqrt[3]{(x-\alpha)^{10}}+x$

37 et 38. $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ $\qquad y=\beta+\sqrt[5]{x^2}$

39 et 40. $y=x^2+\sqrt[3]{(x-1)^5}$ $\qquad y=x^3+x^2-\sqrt[5]{x^7}$

7. *Des Surfaces et des Courbes dans l'espace.*

694. Soient $z=f(x,y)$, $Z=F(X, Y)$ les équations de deux surfaces courbes; pour qu'elles aient un point commun (x,y,z), il faut que pour les mêmes ordonnées $Z=z$, on ait $x=X$, $y=Y$. Prenons sur chacune un autre point répondant aux abscisses $x+h$ et $y+k$; nous représenterons pour abréger les z correspondans (663) par

$$\begin{array}{ll} z+ph+\frac{1}{2}rh^2+\ldots & Z+Ph\ \frac{1}{2}Rh^2+\ldots \\ \quad +qk+shk+\ldots & \quad +Qk+Shk+\ldots \\ \qquad +\frac{1}{2}tk^2+\ldots & \qquad +\frac{1}{2}Tk^2+\ldots \end{array}$$

La distance entre les deux points dont il s'agit, est

$$(P-p)h+(Q-q)k+\tfrac{1}{2}(R-r)h^2+\text{ etc.}$$

Si $P=p$ et $Q=q$, c'est-à-dire, si les différentielles par-

tielles du 1er. ordre de nos fonctions f et F sont respectivement égales, les raisonnemens du n°. 684 feront voir qu'une 3ᵉ. surface ne pourra approcher des premières autant qu'elles le sont l'une de l'autre, à moins que celle-là ne remplisse les mêmes conditions à leur égard : il y a alors *Contact du* 1er. *ordre*. Pour le contact du 2ᵉ. ordre, il faudroit en outre que les différences partielles du 2ᵉ. ordre fussent aussi égales entre elles, ou $R=r$, $S=s$, $T=t$.

Par exemple, tout plan a pour équation (606)... $Z=AX+BY+C$; sa position dépend des trois constantes A,B,C : on peut donc les déterminer de manière à établir une osculation du 1er. ordre. x,y et z étant les coordonnées du point de contact, il vient

$$z=Ax+By+C,\quad p=A,\quad q=B,$$

p et q désignant toujours les fonctions $\frac{dz}{dx}\ \frac{dz}{dy}$, tirées de l'équation $z=f(x,y)$ de la surface courbe; cette équation ayant par conséquent pour dérivée $dz=pdx+qdy$. Si on élimine A,B,C, on trouve pour l'équation du plan tangent

$$Z-z=p\,(X-x)+q\,(Y-y).$$

Une fois l'équation du plan tangent obtenue, il sera facile de trouver tout ce qui se rapporte à sa position. Ainsi (619, 1°.) l'angle qu'il fait avec le plan xy, a pour cosinus,

$$\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}.$$

La normale passe par le point (x,y,z), elle est de plus perpendiculaire au plan tangent; ces conditions, exprimées en analyse (614), donnent, pour les équations de la normale,

$$X - x + p\,(Z - z) = 0, \quad Y - y + q\,(Z - z) = 0.$$

On pourroit aussi trouver les tangentes et cercles osculateurs aux courbes à double courbure, les sphères osculatrices aux surfaces (lorsqu'il y en a), juger par là de la forme de ces surfaces ou de ces courbures, de leurs *maxima*, etc., etc. Mais comme cela nous écarteroit trop de notre but, nous renverrons aux *Fonct. analy.*, n°s. 141, etc., et à l'*Analyse de Monge.*

695. Pour que le plan tangent soit perpendiculaire au plan yz, il faut que son équation soit réduite à la forme $Z - z = q\,(Y - y)$, (602); ainsi $p = 0$. Plus généralement, soit $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, la différentielle de l'équation d'une surface; $P = 0$ est la condition qui exprime que le plan tangent est perpendiculaire au plan yz. Il faut donc que les coordonnées x, y, z du point de contact satisfassent à l'équation $P = 0$, et à celle $\varphi\,(x, y, z) = 0$ de la surface. Ces équations sont donc celles de la courbe qui jouit de la propriété que le plan tangent soit perpendiculaire au plan yz; cette courbe est la limite de la surface dans le sens des yz. Ainsi en éliminant x, on a la projection de la surface sur le plan des yz. De même celle sur le plan xy, se trouve en éliminant z entre $\varphi = 0$, et $R = 0$, etc.

Pour la sphère, par exemple, (601)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2;$$

la dérivée relative à z seul, est $z - c = 0$; éliminant z, on a $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, pour l'équation de la projection sur le plan xy, ce qui est d'ailleurs visible.

Nous ne pouvons donner sur cette théorie des détails plus étendus; mais nous croyons que ces principes suffi-

ront pour l'intelligence du traité de M. Monge, auquel nous renvoyons.

696. Projetons sur le plan xy l'arc s de courbe dans l'espace, puis développons (286, 4°.) le cylindre formé par le système des perpendiculaires à ce plan : la base est la projection λ de l'arc. Or, on peut concevoir cet arc rapporté aux coordonnées rectangles λ et z ; l'aire du cylindre et la longueur de l'arc seront données (681, 682), par les relations $t' = z$ et $s'^2 = 1 + z'^2$, dans lesquelles les dérivées se rapportent à λ. Si on veut qu'elles soient relatives à x, on aura (656)

$$dt = zd\lambda \quad ds^2 = dx^2 + d\lambda^2 ;$$

mais notre projection λ est de même rapportée aux variables du plan xy, en sorte que $d\lambda^2 = dx^2 + dy^2$; donc

$$dt = z \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Si on substitue ici les dérivées dy et dz en fonction de x tirées des équations $M=0$, $N=0$ de notre courbe, on aura par l'intégration, d'une part l'aire t du cylindre droit qui a pour base la projection de l'arc, et qui est terminé par cet arc ; et de l'autre la longueur de l'arc rectifié.

697. Supposons que le trapèze curviligne $CBMP$ tourne autour de l'axe Ax ; cherchons le volume v et l'aire u du corps de révolution qu'il engendre, l'équation de l'arc BM étant donnée, $y = fx$. Soient $v = Fx$, $u = \varphi x$; il s'agit de déterminer les fonctions F et φ. Attribuons à x l'accroissement $PP' = h$, y, v et u deviendront. . . $P'M' = y + k$, $v + i$, $u + l$, et nous aurons 22.

$$k = y'h + \text{etc.}, \; i = v'h + \text{etc.}, \; l = u'h + \text{etc.}$$

22. Il s'agit maintenant, pour appliquer la méthode des limites, de trouver des grandeurs qui comprennent entre elles les accroissemens i et l, quelque petit que soit h.

1°. Les rectangles MP' LP' engendrent, dans leur révolution autour de Ax, des cylindres dont les volumes sont $\pi y^2 h$ et $\pi(y+k)^2 h$ (308) : leur rapport ayant l'unité pour limite, et le volume i étant toujours intermédiaire entre ceux-ci, l'unité doit être aussi la limite du rapport $\frac{i}{\pi y^2 h}$ ou $\frac{v' + \text{etc.}}{\pi y^2}$: donc $v' = \pi y^2$.

698. 2°. La corde MM' décrit un cône tronqué dont l'aire (289, 3°.) est $\pi(2y+k) \times MM'$: de même comme $QH = y'h$ (678), l'aire décrite par la tangente MH est $\pi(2y + y'h) \times MH$. Enfin la différence des cercles concentriques engendrés par $P'H$ et $P'M'$, ou l'aire décrite par HM', est $\pi(y+k)^2 - \pi(y+y'h)^2$ ou $\pi yy''h^2 +$ etc. Ajoutant à l'aire décrite par MH, on a pour le rapport entre le tronc de cône MM' et cette somme,

$$\frac{\pi(2y+k)\,MM'}{\pi(2y+y'h)\,MH + \pi yy''h^2 + \text{etc.}};$$

l'aire l est toujours comprise entre celles-ci, quelque petit que soit h, et comme ce rapport a visiblement l'unité pour limite, celle de $\frac{\pi(2y+k)\,MM'}{l}$ est aussi un; d'où $u' = 2\pi y \sqrt{(1+y'^2)}$.

On mettra donc fx pour y, dans

$$v' = \pi y^2 \quad \text{et } u' = 2\pi y\sqrt{(1+y'^2)} = 2\pi y s',$$

et il restera à intégrer, c.-à-d. à trouver quelles sont les fonctions qui ont pour dérivées les résultats ainsi obtenus (754).

699. Traçons sur un plan APB un trapèze $CDEF$: soient $cdef$ sa projection sur un autre plan AQB, et α l'angle de ces deux plans ; supposons que les côtés CD EF soient perpendiculaires à leur intersection AB. On a (601), $cd = CD \times \cos\alpha$, $ef = EF \times \cos\alpha$; donc l'aire du trapèze $cdef = \frac{1}{2} GH \times (CD + EF) \cos\alpha$, ou ...... $= CDEF \times \cos\alpha$. 47.

Cette relation entre notre trapèze et sa projection a également lieu pour un triangle quelconque DIF, puisqu'en menant les perpendiculaires CD EF sur AB, et CE parallèle à DF, on forme le trapèze $CDEF$ dont l'aire est double de celle du triangle DIF. Or d'une part, toute figure rectiligne est décomposable en triangles ; de l'autre on peut, par la méthode des limites, étendre aussi la proposition à toute aire curviligne. Donc *la projection* P *sur un plan d'une aire quelconque* A *tracée sur un autre plan, est le produit de cette aire par le cosinus de l'angle* α *qu'ils forment entre eux*, ou $P = A \cos\alpha$. 48.

700. Soient donc α α' α'' les angles que fait une aire plane A avec les plans coordonnés, P P' P'' ses trois projections, on a $P = A\cos\alpha$, $P' = A\cos\alpha'$, ... $P'' = A\cos\alpha''$: faisant la somme des carrés, il vient

$$A^2 = P^2 + P'^2 + P''^2,$$

à cause de $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1$ (618, 3°). Donc *le carré d'une aire plane quelconque est la somme des carrés de ses trois projections.*

Ces théorêmes servent à trouver l'étendue des surfaces planes situées dans l'espace, en les ramenant à être exprimées à l'aide de deux variables.

701. Soit $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface courbe ; menons quatre plans parallèles deux à deux à ceux des

49. xz et des yz : cherchons le volume V et l'aire U du corps MSC renfermé entre ces limites. Pour cela, attribuons à x et y les accroissemens h et k : le point M (x, y, z) sera comparé au point C, en sorte que le corps aura pris l'accroissement renfermé entre les plans $MESD$ $SBFM$: V et U sont donc des fonctions de x et y qu'il s'agit de déterminer. x étant augmenté de h et y de k, V sera accru (663) de

$$\frac{dV}{dx}h+\frac{dV}{dy}k+\frac{d^2Vh^2}{dx^2 2}+\frac{d^2V}{dxdy}hk+\frac{d^2V}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\ldots\ldots;$$

or, si on n'eût fait varier que x, le corps auroit reçu l'augmentation

$$PEDMQ=\frac{dV}{dx}h+\frac{d^2V}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\ldots$$

de même en ne faisant croître que y, on a

$$MPRBF=\frac{dV}{dy}k+\frac{d^2V}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\ldots$$

donc en retranchant, on a volume $MCRQ=\dfrac{d^2V}{dxdy}hk+\ldots$

on verroit de même que l'aire $MC=\dfrac{d^2U}{dxdy}hk+\ldots.$

Pour appliquer ici la méthode des limites, cherchons des grandeurs entre lesquelles ce volume et cette aire soient toujours renfermés, quelque petit que soit h : représentons le corps $MCRSQP$ à part, fig. 50.

50. 1°. Le parallélipipède rectangle $MPSs$ a pour volume hkz ; celui de tout autre prisme construit sur la même base, et dont $z+l$ est la hauteur, est $=hk(z+l)$. Le rapport $\dfrac{z}{z+l}$ de ces volumes ayant l'unité pour limite,

celle de hkz : $\frac{d^2V}{dxdy}kh$ + etc. est *un* ; ainsi 50.

$$\frac{d^2V}{dxdy} = z,$$

on mettra donc pour z sa valeur $f\,(x,y)$; puis on intégrera deux fois, d'abord relativement à x, en regardant y comme constant ; enfin on intégrera de nouveau le résultat par rapport à y. (*Voy.* n°. 755).

702. 2°. Menons un plan tangent Ms' au point 50.
$M\,(x,y,z)$: l'aire $Mr's'q'$ qui est renfermée entre les plans MR MQ Qs' $s'R$ est (699) le quotient de sa base $PQRS$ divisée par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec le plan xy ou hk : $\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = hk\sqrt{(1+p^2+q^2)}$, (694). Mais il est facile de voir que l'unité est la limite du rapport de $\frac{d^2U}{dxdy}hk$ + etc. à cette quantité. Donc

$$\frac{d^2U}{dxdy} = \sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Il faudra donc différentier l'équation $z = f\,(x,y)$ de la surface, puis de $dz = pdx + qdy$, tirer les valeurs de p et q en fonction de x et y, et les substituer ici : enfin intégrer comme on l'a dit ci-dessus. Nous donnerons des applications de ces diverses formules (755).

8. *De la Méthode infinitésimale.*

703. Nous avons déja remarqué (tom. I, note p. 251), en appliquant la méthode des limites (167) à une équation entre des constantes et des variables qui peuvent

être rendues aussi petites qu'on veut, que lorsqu'on n'a besoin que de la relation qui lie les termes constans, ce n'est pas commettre une erreur que de négliger dans le calcul, quelques-uns des termes qu'on sait devoir disparoître par la nature même du procédé. La certitude mathématique ne sera donc pas altérée par ces omissions volontaires, pourvu qu'on se soit assuré qu'en effet elles n'affectent que les quantités qui n'entrent pas dans le résultat.

704. On pourra donc dans toute question semblable, omettre les termes *indéfiniment petits*, que les géomètres ont appelés avec Leibnitz des *indéfiniment petits*. En se dispensant d'y avoir égard dans les calculs, on les abrégera beaucoup, puisqu'il est souvent difficile de les évaluer ; et les résultats seront tout aussi exacts. On pourra même présenter la théorie avec la rigueur géométrique, en prouvant que les quantités omises sont au rang de celles qui doivent en être ôtées. Cette méthode est précieuse, non-seulement pour graver les résultats dans la mémoire, mais encore pour les spéculations analytiques compliquées ; et il importe de ne pas se priver d'un secours si puissant, sur-tout en considérant qu'on peut toujours rendre au procédé la rigueur qui lui manque en apparence.

705. Les applications de ces notions aux élémens de géométrie sont si faciles, que nous nous dispenserons de les faire ; chacun pourra aisément y suppléer. Mais venons-en à celles du calcul différentiel.

Soient y z t. . . des fonctions quelconques de x : si x prend l'accroissement dx, ceux que prendront y,z. . . seront

$$\mathrm{d}y = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}x^2 + \text{etc.}$$
$$\mathrm{d}z = A'\mathrm{d}x + B'\mathrm{d}x^2 + \text{etc.}$$

et ainsi des autres; or; quel que soit le but de notre opération, dy doit être combiné avec dz, dt, ... de manière à former une équation $M = 0$. Le facteur commun dx pourra être omis, en sorte que les premiers coefficiens en soient seuls exempts. Mais $x\,y\,z$... étant maintenant regardés comme des termes fixes, leurs accroissemens $dx\,dy$... pourront être rendus aussi petits qu'on voudra, de sorte qu'en faisant $dx = 0$, l'équation $M = 0$ devra perdre tous les termes B, B', ... on pourra donc d'avance dégager le calcul de ces termes, et dire que $dy = Adx$, $dz = A'dx$, etc...; les autres termes sont négligés comme des *infiniment petits du 2e. ordre*, expression qui sert à éviter une circonlocution.

A est la dérivée que nous avons désignée par y', et que nous savons trouver, par des règles sûres, pour toute fonction. On verra aisément que .... $d^2y = dA.dx = Kdx^2$, et que d^2y est infiniment petit du second ordre...., etc.

706. Soit $BM = s$ un arc de courbe, les coordon- 22.
nées de M étant x et y; enfin $y = fx$ l'équation de cette courbe. La tangente TM sera supposée le prolongement de l'élément infiniment petit MM' de la courbe; ce qui revient à dire que la corde de l'arc $MM' = ds$, pouvant approcher autant qu'on veut de MH, l'angle $M'MQ$, dont la tangente $= \frac{M'Q}{MQ}$, ne diffère de HMQ que d'une quantité indéfiniment petite. En résolvant le triangle $M'MQ$, dont les côtés sont dx, dy et ds, on a donc (678)

$$\text{tang } T = \frac{dy}{dx},\ \cos T = \frac{dx}{ds},\ \sin T = \frac{dy}{ds}.$$

Puisque l'arc $MM' = s$ et sa corde diffèrent aussi peu 22.

qu'on veut, la longueur de l'hypothénuse, ou. . . . . $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ne peut différer de ds que d'une quantité du 2e. ordre; donc (681)

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

22. Soit t l'aire $CBMP$; le rectangle indéfiniment petit $MPP'Q = ydx$, pourra différer aussi peu qu'on voudra de dt; donc (682)

$$dt = ydx.$$

25. 707. Appliquons ce procédé aux coordonnées polaires. Du pôle A pour centre, décrivons l'arc MQ par le point M (r, θ) nous aurons $\frac{MQ}{mq} = \frac{AM}{Am}$ ou $\frac{MQ}{d\theta} = \frac{r}{1}$; donc $MQ = rd\theta$. Menons AT perpendiculaire sur AM, et la tangente TM' qui se confond avec l'arc, suivant l'élément $MM' = ds$: or les triangles semblables $MM'Q$ TMA donnent $\frac{MQ}{M'Q} = \frac{AT}{AM}$ ou $\frac{rd\theta}{dr} = \frac{AT}{r}$; donc sous-tang. $AT = \frac{r^2 d\theta}{dr}$. Dans le triangle rectangle TMA, on a tang $TMA = \frac{AT}{AM} = \frac{rd\theta}{dr}$: comme n°. 680.

De plus $MM'^2 = MQ^2 + M'Q^2$ devient. . . . . $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$. Enfin l'aire $ABM = \tau$ comprise entre deux rayons vecteurs a pour différentielle AMM' qu'on peut regarder comme égal à AMQ : or. . . . . $AMQ = \frac{1}{2} AM \times MQ$; d'où $d\tau = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, comme n°. 683.

22. 708. Dans sa révolution autour de Ax, $CBMP$ engendre un corps dont le volume est v et l'aire u; or l'aire MM' décrit la différentielle de u, qui est un tronc de cône, et $= \frac{1}{2} MM'$ (cir $PM +$ cir $P'M'$), ou plutôt $= MM' \times$ cir PM; donc $du = 2\pi y ds$. De même l'aire

$MPP'M'$ engendre la différentielle du volume v ; on peut le regarder comme égal au cylindre décrit par $MPP'Q = PP' \times$ cercle PM : donc $dv = \pi y^2 dx$. Cela est conforme au n°. 697.

709. Soit la surface courbe BD dont l'équation. . . 49.
$z = f(x, y)$ est donnée : lorsqu'on fera croître x de dx, le volume $V = MN$ croîtra de $MBFR = \frac{dV}{dx} dx$. Si dans ce résultat, on augmente y de dy, le volume MB croîtra de $MCSP = \frac{d^2V}{dxdy} . dxdy$. On verra de même que l'aire $Mz = U$ augmentera de $MC = \frac{d^2U}{dxdy} . dxdy$.

Cela posé, 1°. le plan $Mrs'q$, parallèle au plan xy, 50.
formera le parallélipipède $MPSs$ dont le volume est $zdxdy$: donc $d^2V = zdxdy$, formule qui revient à celle du n°. 701.

2°. Le plan tangent $Mr's'q'$ peut être supposé confondu avec la surface dans l'étendue de MC : et comme (699) la base PS ou $dxdx$ est $= MC \times \cos \alpha$, α désignant l'inclinaison de ce plan sur celui des xy, on a $MC = \frac{dxdy}{\cos \alpha} = dxdy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$, (694). Donc $d^2U = dxdy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ comme n°. 702.

LIVRE HUITIÈME.

CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

INTÉGRATION DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

1. *Règles fondamentales.*

710. LE calcul intégral a pour but de remonter des fonctions dérivées à leurs primitives ; on y parvient à l'aide d'une série de principes et de transformations. Pour éviter les modifications qu'elles devroient faire éprouver aux formules, en vertu des divers changemens de variable indépendante (656), nous préférerons l'emploi de la notation de Leibnitz. Lorsqu'on veut marquer qu'on doit prendre l'intégrale d'une fonction, on la fait précéder du signe $\int$ qu'on prononce *Somme* : ainsi. ... $y'=4x^3$, étant la dérivée de x^4+c, on écrira $dy=4x^3dx$, d'où $y=\int 4x^3dx=x^4+c$.

711. Examinons la relation qui doit exister entre les fonctions primitives fx et Fx d'une même dérivée y'. Le théorème de Taylor donne

$$f(x+h)=fx+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots\ldots$$
$$F(x+h)=Fx+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots\ldots$$

retranchant, on trouve

$$f(x+h) - F(x+h) = fx - Fx.$$

Il faut donc que $fx - Fx$ n'éprouve aucun changement, quelque valeur que prenne x; ainsi $fx - Fx$ est indépendant de x, d'où $fx = Fx + C$, C désignant une constante. Donc *toutes les fonctions primitives qui ont même dérivée, ne diffèrent entre elles que par la valeur du terme constant. Si donc on ajoute une constante arbitraire à toute intégrale, elle prendra la forme la plus générale dont elle soit susceptible.*

712. En renversant les règles principales du calcul des dérivations, on trouvera autant de règles du calcul intégral. Il sera facile d'en conclure que,

I. *L'intégrale d'un polynome est la somme des intégrales de ses divers termes : on conserve à chaque terme son signe et son coefficient* (629).

II. *Pour intégrer* $z^n dz$, *il faut augmenter l'exposant* n *d'une unité, supprimer le facteur* dz, *et diviser par l'exposant ainsi augmenté*, (635); ou

$$\int Az^n dz = \frac{Az^{n+1}}{n+1} + C.$$

Pareillement $Az^{-n}dz$, ou $\frac{Adz}{z^n}$, a pour intégrale.... $\frac{Az^{-n+1}}{-n+1}$ ou $-\frac{A}{(n-1)z^{n-1}}$. Ainsi *lorsque la variable est au dénominateur, on prend la fraction en signe contraire; on diminue l'exposant de la variable d'une unité, et on la multiplie par cet exposant ainsi diminué.*

Ces règles s'appliquent aussi aux fonctions qu'on peut ramener à $z^n dz$. Pour $ax^{n-1}dx\,(b+cx^n)^m$, on remarque que la differentielle de $b+cx^n$ est $ncx^{n-1}\,dx$; on peut

préparer le 1er. facteur ax^{n-1} de manière à le mettre sous cette forme, puisqu'il n'en diffère que par le facteur constant nc, et on aura

$$\frac{a}{nc} \times ncx^{n-1}dx\ (b+cx^n)^m = \frac{a}{nc}\ z^m dz,$$

en faisant $b+cx^n=z$. On a donc pour intégrale.....
$\frac{az^{m+1}}{nc\ (m+1)}$, ou $\frac{a}{nc\ (m+1)}\ (b+cx^n)^{m+1}+C$. La transformation qui a introduit z n'étoit même pas nécessaire, et il conviendra à l'avenir de l'éviter, parce qu'elle fait languir les calculs.

De même $\int 6\sqrt{(4x^2+3)}\ xdx = \frac{1}{2}(4x^2+3)^{\frac{3}{2}}+C$.

III. La règle précédente est en défaut lorsque $n=-1$, puisqu'on trouve $\int z^{-1}dz=\infty$; mais cela vient de ce que l'intégrale appartient à une autre espèce de fonction. On sait (648) que $\int\frac{dz}{z}=\log\ z+c$, et plus généralement

$$\int\frac{dz}{a+z}=\log\ (a+z)+C.$$

Donc *toute fraction dont le numérateur est la différentielle du dénominateur a pour intégrale le logarithme du dénominateur.* Dans ce cas, nous mettrons à l'avenir, pour la commodité des calculs, la constante arbitraire sous la forme log C.

Pour intégrer $\frac{5x^3dx}{3x^4+7}$, je remarque qu'au facteur constant près 5, cette fraction rentre dans la règle précédente : je la prépare donc ainsi

$$\int\frac{5}{12}\cdot\frac{12x^3dx}{3x^4+7}=\frac{5}{12}\log\left\{C\ (3x^4+7)\right\}.$$

IV. *Toute fraction dont le dénominateur est un radical carré, et dont le numérateur est la différentielle de la fonction que ce radical affecte, a pour intégrale le double de ce radical* (636), ou $\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + C$.

V. Une des règles les plus importantes à considérer, est celle de l'intégration *par parties;* voici en quoi elle consiste. On a vu (630) que $d(ut) = udt + tdu$; donc, en intégrant,

$$ut = \int udt + \int tdu$$

et

$$\int udt = ut - \int tdu;$$

ainsi, *en décomposant une différentielle proposée en deux facteurs dont l'un soit directement intégrable, il faudra intégrer en regardant l'autre facteur comme constant; mais on devra retrancher ensuite l'intégrale de la quantité qu'on obtient, en différentiant ce résultat, par rapport à la seule fonction qu'on a prise pour constante.*

Ainsi, pour intégrer $\log x\, dx$, je regarde dx comme seule variable, et j'ai $x \log x$; je différentie ce résultat par rapport à $\log x$ seul, et j'ai

$$\int \log x\, dx = x \log x - \int x. \frac{dx}{x} = x \log x - x + C.$$

Cette règle offre l'avantage de faire dépendre l'intégrale cherchée d'une autre; et, l'adresse de ce genre de calcul consiste à faire la décomposition, de sorte que cette dernière soit moins compliquée que la proposée.

VI. La règle du n°. 652 donne, le rayon étant *un*,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{arc}\ (\sin = z) + C$$

$$\int \frac{-dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{arc}\ (\cos = z) + C$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc}\ (\text{tang} = z) + C.$$

On pourroit aussi supposer le rayon $= r$, et on auroit

$$\int \frac{rdz}{\sqrt{(r^2-z^2)}} = \text{arc}\ (\sin = z) + C.$$

Pour obtenir $\int \frac{mdz}{a+bz^2}$, on divisera haut et bas par a, et on aura

$$\frac{m}{a} \cdot \frac{dz}{1+\frac{bz^2}{a}} = \frac{m}{a} \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

en faisant $\frac{bz^2}{a} = t^2$. Donc $\frac{m}{\sqrt{(ab)}}$ arc (tang $= t$) est l'intégrale cherchée, le rayon étant un ; d'où

$$\int \frac{mdz}{a+bz^2} = \frac{m}{\sqrt{(ab)}} \cdot \text{arc} \left(\text{tang} = z \sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

On trouve de même

$$\int \frac{mdz}{\sqrt{(a^2-bz^2)}} = \frac{m}{\sqrt{b}} \cdot \text{arc} \left(\sin = \frac{z}{a} \sqrt{b}\right) + C.$$

Le calcul différentiel pourroit fournir encore d'autres règles, mais nous n'y aurons pas égard présentement.

2. *Des Fractions rationnelles.*

713. Nous avons donné (559) des procédés généraux pour décomposer toute fraction rationnelle $\frac{N}{D}$ en d'au–

tes, dont la forme soit l'une des suivantes :

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^n}$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q},\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

$A, B, p, q, n,$..... étant des constantes, et les facteurs de x^2+px+q étant imaginaires. Il s'agit donc de donner des règles pour remonter de ces fractions aux expressions dont elles sont les dérivées. Remarquons que dans les deux dernières, si on fait disparoître le terme px, par la transformation $x=z-\frac{1}{2}p$, puis si on fait $\beta^2=q-\frac{1}{4}p^2$, quantité positive par supposition, on a simplement

$$\frac{Az+B'}{z^2+\beta^2} \text{ et } \frac{Az+B'}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

Ier. CAS. L'intégrale de $\frac{Adx}{x-a}$ est $\log(x-a)+\log c$, ou $\log c\,(x-a)$. Par exemple, on a vu (560, 2°.) que

$$\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{dx}{a+x}+\frac{dx}{a-x}\right),$$

dont $\frac{1}{2a}\{\log(a+x)-\log(a-x)+\log c\}$ est l'intégrale; d'où $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{c\,(a+x)}{a-x}$.

De même $\frac{(2-4x)\,dx}{x^2-x-2}=\frac{2dx}{2-x}-\frac{2dx}{x+1}$ a pour intégrale $-2\log(x-2)-2\log(x+1)+\log c$, ou $\log\frac{c}{(x^2-x-2)^2}$.

IIe. CAS. La fraction $\frac{Adx}{(x-a)^n}$ a pour intégrale

(règle II) $\frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$. Par exemple (560, 6°.)

$$\frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}dx=\frac{2dx}{x}+\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{\frac{3}{4}dx}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}dx}{(x+1)^2}-\frac{\frac{5}{4}dx}{x+1}$$

donne pour intégrale

$$2\log x-\frac{1}{x-1}-\tfrac{3}{4}\log(x-1)+\frac{1}{2(x+1)}-\tfrac{5}{4}\log(x+1)+c.$$

III°. CAS. Pour la fraction $\frac{Az+B}{z^2+\beta^2}dz$, on intègre séparément $\frac{Azdz}{z^2+\beta^2}$ et $\frac{Bdz}{z^2+\beta^2}$; la première par la règle III, la deuxième par celle VI, n°. 712. On trouve

$$\int\frac{(Az+B)dz}{z^2+\beta^2}=\tfrac{1}{2}A\log(z^2+\beta^2)+\frac{B}{\beta}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{z}{\beta}\right).$$

Ainsi on décompose $\int\frac{xdx}{x^3-1}$ en (560, 5°.)

$$\int\frac{\frac{1}{3}.dx}{x-1}-\int\frac{\frac{1}{3}(x-1)dx}{x^2+x+1};$$

le 1er. terme $=\frac{1}{3}\log(x-1)$; pour le 2e. on fait $x=z-\frac{1}{2}$, ce qui donne $-\int\frac{\frac{1}{3}zdz}{z^2+\frac{3}{4}}+\int\frac{\frac{1}{2}dz}{z^2+\frac{3}{4}}$; l'une est....... $=-\frac{1}{6}\log(z^2+\frac{3}{4})=-\frac{1}{3}\log\sqrt{(x^2+x+1)}$; l'autre donne $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. arc $\left(\text{tang}=\frac{2z}{\sqrt{3}}\right)$ Donc

$$\int\frac{xdx}{x^3-1}=\tfrac{1}{3}\left\{\log c(x-1)-\log\sqrt{(x^2+x+1)}+\sqrt{3}.\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

Prenons pour second exemple (560, 4°.)

$$\frac{(x^2-x+1)dx}{(x+1)(x^2+1)}=\tfrac{3}{2}.\frac{dx}{x+1}-\tfrac{1}{2}.\frac{(x+1)dx}{x^2+1},$$

l'intégrale est $\log \frac{c\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt[4]{(x^2+1)}} - \frac{1}{2} \text{arc } (\tang = x)$.

IVe. CAS. Il s'agit d'intégrer une série de fractions de la forme $\frac{(Az+B)\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}$, n étant successivement $=1,2,3\ldots$ Pour cela, chacune se partage en deux, $\frac{Az\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}$ et $\frac{B\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}$. La 1re. s'intègre sur-le-champ (règle II) (*), et donne $\frac{-A}{2(n-1)(z^2+\beta^2)^{n-1}}$: si cependant $n=1$, on a $\frac{1}{2} A \log (z^2+\beta^2)$.

714. Quant à $\frac{B\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}$, on en facilite l'intégration en la faisant dépendre d'une autre plus simple. Pour cela, K et L étant des coefficiens indéterminés, on suppose (**)

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \frac{Kz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \int \frac{L\,dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}};$$

pour trouver les valeurs de K et L, on différentiera cette équation; puis on réduira au même dénominateur $(z^2+\beta^2)^n$, et on aura

$$1 = K(z^2+\beta^2) - 2K(n-1)z^2 + L(z^2+\beta^2);$$

(*) En faisant $z^2+\beta^2=t^2$, la fraction devient monome, on a $\frac{A\,dt}{t^{n-1}}$, dont l'intégrale est $\frac{-A}{2(n-1)t^{2(n-1)}}$.

(**) La forme de cette équation est légitimée par la suite du calcul, qui conduit à deux équations seulement pour trouver K et L. Cette transformation est indiquée par l'habitude de l'analyse, qui fait prévoir que le résultat ne peut contenir que des termes de deux espèces, les uns en z^2, les autres constans.

d'où, comparant terme à terme, on tire

$$K+L=2K\,(n-1),\ (K+L)\,\beta^2=1\,;$$

tirant les valeurs de K et L, et les substituant, on obtient enfin

$$\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}=\frac{z}{2(n-1)\beta^2(z^2+\beta^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)\beta^2}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}.$$

L'usage de cette équation est facile à concevoir. On a une série de fractions de la forme $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}$: on intégrera d'abord celle où n a la plus grande valeur, et notre formule la remplacera par deux termes, l'un intégré, et l'autre de la forme $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}$, qui s'ajoutera avec la fraction suivante. On continuera ainsi jusqu'à la fraction $\frac{dz}{z^2+\beta^2}$ dont l'intégrale est connue (règle VI).

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{(x^4+2x^3+3x^2+3)\,dx}{(x^2+1)^3}=\frac{(-2x+1)dx}{(x^2+1)^3}+\frac{(2x+1)dx}{(x^2+1)^2}+\frac{dx}{x^2+1}$$

les 1ers. termes de chacune donnent

$$\int\frac{-2xdx}{(x^2+1)^3}=\frac{1}{2\,(x^2+1)^2},\quad \int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}=\frac{-1}{x^2+1}\,;$$

quant aux seconds termes on a, par notre formule,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4\,(x^2+1)^2}+\tfrac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Or, ce dernier terme, joint à celui $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ de notre 2e. fraction, donne $\frac{7}{4}\cdot\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$; mais on a de même

$$\tfrac{7}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{7x}{8(x^2+1)}+\tfrac{7}{8}\int\frac{dx}{x^2+1};$$

enfin, ajoutant ce terme à intégrer avec la 3e. fraction, on trouve

$$\frac{15}{8}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{15}{8}\text{ arc }(\text{tang}=x).$$

Il ne s'agit plus que de réunir ces diverses parties, et on a, pour l'intégrale de la fonction proposée,

$$\frac{2+x}{4(x^2+1)^2}+\frac{7x-8}{8(x^2+1)}+\frac{15}{8}\text{ arc }(\text{tang}=x)+C.$$

En opérant de même, on trouvera l'intégrale de $\frac{dx}{(1+x)x^2(x^2+2)(x^2+1)^2}$. Cette fraction a été décomposée (560, 8°.). Les seuls termes qui peuvent présenter quelque difficulté, sont

$$\int\tfrac{1}{2}\frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx+\int\tfrac{1}{4}\frac{x-1}{x^2+1}dx$$

$$=c-\frac{x+1}{4(x^2+1)}+\tfrac{1}{8}\log(x^2+1)-\tfrac{1}{2}\text{ arc }(\text{tang}=x).$$

715. Le procédé du n°. 559, pour déterminer les coefficiens des fractions composantes, étant d'une longueur rebutante, on préfère le suivant.

1°. Soit

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-a}+\frac{P}{S},$$

équation où il s'agit de déterminer A sans connoître P, et où $D=S(x-a)$, S n'ayant pas $x-a$ pour facteur. On a

$$N=AS+P(x-a);$$

et, comme cette relation doit subsister quel que soit x; faisons $x=a$, et désignons par n d et s ce que deviennent alors N D et S; nous aurons

$$n=As, \quad \text{d'où } A=\frac{n}{s};$$

ainsi
$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{a+x}$$
donne
$$1=A(a+x)+B(a-x).$$

Faisant tour-à-tour $x=a$, et $x=-a$, on trouve....
$A=B=\frac{1}{2a}$.

La dérivée de l'équation $D=S(x-a)$ est réduite à $d'=s$, lorsqu'on fait $x=a$; ainsi $A=\frac{n}{d'}$.

2°. Multiplions par $(x-a)^n$ l'équation

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{B}{(x-a)^{n-1}}\ldots+\frac{T}{x-b}+\frac{P}{S};$$

il vient $\quad K=A+B(x-a)+C(x-a)^2+\ldots.$

K désignant $\frac{N}{S}$. En faisant $x=a$, on trouve........
$A=K=\frac{n}{s}$;

et, comme

$$K-A=B(x-a)+C(x-a)^2+\ldots,$$

le 1er. membre $K-A$ doit être divisible par $x-a$, et a la forme $K-A=K_1(x-a)$; donc

$$K_1=B+C(x-a)+\ldots.$$

On fera de nouveau $x=a$, et on déterminera $B=K_1$; et ainsi de suite.

On peut encore employer le calcul différentiel avec avantage; car on a

$$\begin{aligned}K &= A + B(x-a) + C(x-a)^2 + D(x-a)^3 \ldots\\ K' &= \quad B \quad + 2C(x-a) + 3D(x-a)^2 \ldots\\ K'' &= \quad\quad 2C \quad + 6D(x-a) \ldots\end{aligned}$$

etc. . .

en faisant $x = a$, on obtient

$$A = k \quad B = k' \quad C = \tfrac{1}{2} k'', \; D = \tfrac{1}{6} k''', \ldots$$

Soit par exemple (560, 6°.)

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{x^5 - 2x^3 + x} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{P}{S}$$

d'où $\dfrac{x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)^2} = A + B(x+1) + \dfrac{P}{S}(x+1)^2$

$$\frac{3x^2 + 2x - A(3x^2 - 4x + 1)}{x(x-1)^2} = B + \text{etc.}$$

faisant $x = -1$, on a $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{5}{4}$.

3°. Pour l'équation

$$\frac{N}{D} = \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} + \frac{P}{S}$$

on a $\quad N = (Ax + B)S + P(x^2 + px + q)$

on substituera pour x l'une des racines imaginaires de $x^2 + px + q = 0$; P disparoîtra, le résultat aura deux sortes de termes, les uns réels, les autres imaginaires; et l'équation se partagera en deux (494) qui feront connoître A et B.

Soit $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \dfrac{P}{S}$

d'où $\quad x = (Ax + B)(x-1) + P(x^2 + x + 1)$

mais $x^2 + x + 1 = 0$ donne $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$; donc en substituant on trouve

$$-2 = -6B,\ 1 = -2A + B,\ \text{d'où } -A = B = \tfrac{1}{3}.$$

4°. En multipliant par $(x^2 + px + q)^n$ l'équation

$$\frac{N}{D} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{A'x + B'}{(x^2 + px + q)^{n-1}} \ldots + \frac{P}{S}$$

on a $K = Ax + B + (A'x + B')(x^2 + px + q) +$ etc.

K représentant toujours $\frac{N}{S}$. Ce cas se compose des deux précédens, et doit être traité de même. On substituera d'abord l'une des racines de $x^2 + px + q = 0$, et l'équation $K = Ax + B$, se partagera en deux, qui serviront à déterminer A et B. La dérivée de notre équation est

$$K' = A + (A'x + B')(2x + p)$$

en omettant les termes dont $x^2 + px + q$ est facteur. La racine imaginaire de x mise ici, on aura encore deux équations qui donneront A' et B', etc.

Pour $\frac{x^3 - 2x^2 + x - 3}{(x^2 - 2x + 2)^2}$, on trouve

$$x^3 - 2x^2 + x - 3 = Ax + B + (A'x + B')(x^2 - 2x + 2)$$

faisant $x = 1 + \sqrt{-1}$, on trouve $A = -1$, $B = -3$; transposant $Ax + B$, il vient

$$x^3 - 2x^2 + 2x = (A'x + B')(x^2 - 2x + 2)$$

dont la dérivée est

$$3x^2 - 4x + 2 = (A'x + B')(2x - 2) + \text{etc.}$$

et faisant de nouveau $x = 1 + \sqrt{-1}$, on obtient enfin $A' = 1$, $B' = 0$. La fraction proposée équivaut donc à

$$-\frac{x+3}{(x^2-2x+2)^2}+\frac{x}{x^2-2x+2}.$$

En voici encore deux exemples.

$$\int\frac{b^3dx}{x^6-a^6}=\frac{b^3}{3a^6}\left\{\log\sqrt{\frac{(x-a)(x^2-ax+a^2)}{(x+a)(x^2+ax+a^2)}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}\right)+3\,\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{2x+a}{a\sqrt{3}}\right)+C\right\}$$

$$\int\frac{x^3-6x^2+4x-1}{x^4-3x^3-3x^2+7x+6}dx=\log\left(\frac{(x-2)(x+1)}{x-3}\right)+\frac{1}{x+1}+C.$$

3. *Fonctions irrationnelles.*

716. Il suit de ce qu'on vient de voir, qu'on sait intégrer toute fonction algébrique rationnelle, et celles qu'on peut rendre telles par des transformations. Voyons d'abord les radicaux monomes. Soit

$$\frac{\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}+x^2}{x+\sqrt{x}}dx$$

il est visible qu'en faisant $x=z^6$ les irrationnalités disparoîtront, puisque 6 est divisible par les dénominateurs 3 et 2 des exposans proposés.

Par là on aura à intégrer

$$6dz.\frac{z^{14}+z^{11}+z^4}{z^3+1}=z^{11}dz+zdz-\frac{zdz}{z^3+1}$$

ce qui n'offre pas de difficulté.

Pour $\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$, on fera $x=z^2$, et on aura

$$\frac{2z^2dz}{z^2-1}=2dz+\frac{2dz}{z^2-1}$$

dont l'intégrale est $2z + \log(z-1) - \log(z+1)$, ou

$$2\sqrt{x} + \log \frac{c(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}.$$

717. Prenons maintenant une fonction quelconque affectée du radical $\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$; on dégage d'abord x^2 de son coefficient C, en multipliant et divisant par $\sqrt{C}$. Il se présente deux cas, suivant que x^2 est positif ou négatif (*).

1er. *cas*. Si on a $\sqrt{(a+bx+x^2)}$, on fera

$$\sqrt{(a+bx+x^2)} = x \pm z, \text{ ou } = z \pm x$$

d'où $$a + bx = \pm 2xz + z^2$$

la valeur de x sera rationnelle $= \dfrac{z^2-a}{b \mp 2z}$,

d'où $$dx = \frac{2(bz \mp a \mp z^2)}{(b \mp 2z)^2}\, dz$$

puis le radical, ou $x \pm z$, sera rationnel, ainsi que la fonction proposée.

Soit, par exemple, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+x^2)}}$; en faisant le radical $= z - x$, il devient $\dfrac{z^2+bz+a}{2z+b}$; et la fonction proposée se change en

---

(*) X désignant une fonction rationnelle de x, on aura à intégrer $\dfrac{X dx}{\sqrt{(a+bx \pm x^2)}}$, ou $X\sqrt{(a+bx\pm x^2)}\,dx$: ces deux expressions se traitent de la même manière. On pourroit même ramener l'une à l'autre; car en multipliant et divisant celle-ci par le radical, on a $\dfrac{X(a+bx\pm x^2)\,dx}{\sqrt{(a+bx\pm x^2)}}$.

$$\int \frac{2dz}{2z+b} = \log(2z+b) + \text{const.}$$

donc $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+x^2)}} = \log c\left(x + \frac{1}{2}b + \sqrt{a+bx+x^2}\right)$

donc aussi $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = \log c\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$.

Pour intégrer $dy = dx\sqrt{(a^2+x^2)}$, on fait

$$\sqrt{(a^2+x^2)} = z - x, \text{ d'où } dy = zdx - xdx$$

ainsi $y = -\frac{1}{2}x^2 + \int zdx$; mettant pour dx sa valeur... $\frac{dz}{2z^2}(a^2+z^2)$; puis intégrant, on a

$$y = c + \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2+x^2)} + \frac{1}{2}a^2 \log\left\{x + \sqrt{(a^2+x^2)}\right\}$$

Si on met $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ sous la forme...........

$dy\sqrt{-1} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}$ on a en intégrant

$$y\sqrt{-1} = \log\left\{x + \sqrt{(x^2-1)}\right\} + c$$

mais $x = \cos y$, $\sqrt{(x^2-1)} = \sqrt{-1} \,.\, \sin y$; de plus $c = 0$, puisque $x = 1$, doit rendre y nul : on retrouve donc la formule (580, 4°.)

$$\pm y\sqrt{-1} = \log(\cos y \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin y).$$

718. 2°. *cas.* Si on a $\sqrt{(a+bx-x^2)}$, la méthode précédente ne peut être appliquée sans introduire des imaginaires ; mais remarquons que le trinome $a+bx-x^2$ doit avoir ses facteurs réels, puisque sans cela il seroit négatif quel que fût x (495). Le radical étant alors imaginaire, il faudroit, comme dans l'exemple précédent, mettre $\sqrt{-1}$ en facteur, puisqu'on ne doit pas espérer de trouver l'intégrale réelle. On retomberoit alors sur le

cas qu'on vient de traiter. Soient donc α et β les deux racines réelles de $x^2 - bx - a = 0$, on fera

$$\sqrt{(a + bx - x^2)} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta - x)} = (x - \alpha)\, z$$

carrant et supprimant le facteur commun $x - \alpha$, on a $\beta - x = (x - \alpha)\, z^2$; x et dx sont donc rationnels.

Par exemple on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + bx - x^2)}} = c - 2 \text{ arc } \left\{\text{tang} = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}\right\}.$$

De même pour $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$, qu'on sait d'ailleurs être l'arc dont le sinus est x, on fera $\sqrt{(1 - x^2)} = (1 - x)\, z$,

d'où $$x = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1},\ dx = \frac{4z dz}{(z^2 + 1)^2}$$

enfin $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \int \frac{2dz}{z^2 + 1} = c + 2 \text{ arc } (\text{tang} = z)$$

ou arc $(\sin = x) = -\frac{1}{2}\pi + 2 \text{ arc } \left(\text{tang} = \sqrt{\left\{\frac{1 + x}{1 - x}\right\}}\right)$

Pour $dy = dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$, on trouve

$$dy = \frac{8 a^2 z^2 dz}{(1 + z)^3}$$

fonction rationnelle facile à intégrer.

On pourroit appliquer ce procédé au 1[er]. cas, lorsque les racines de $x^2 + bx + a = 0$, sont réelles.

719. L'adresse qu'on acquiert par l'habitude, indique les transformations les plus favorables. Ainsi on pourra faire disparoître le second terme sous le radical (502), ce qui le mettra sous la forme $\sqrt{(z^2 \pm a^2)}$ ou....... $\sqrt{(a^2 \pm z^2)}$, en sorte qu'on aura pour termes à intégrer

$$\frac{z^m dz}{\sqrt{(z^2 \pm a^2)}} \text{ ou } \frac{z^m dz}{\sqrt{(a^2 \pm z^2)}}$$

c'est ce qui fera bientôt le sujet de notre attention (724). Dans ce dernier cas, on pourra chasser aussi l'irrationnalité en faisant $\sqrt{(a^2 \pm z^2)} = a - uz$, parce que le carré de cette équation est divisible par z, et que z et dz sont rationnels

$$z = \frac{2au}{u^2 \mp 1}, \; dz = -2adu \cdot \frac{u^2 \pm 1}{(u^2 \mp 1)^2}.$$

C'est ainsi que $\frac{dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, devient $\frac{-dz}{\sqrt{(b^2 - z^2)}}$ en faisant $x = b - z$; l'intégrale est donc (règle VI)

$$c + \text{arc}\left(\cos = \frac{z}{b}\right) \text{ ou } c + \text{arc}\left(\cos = \frac{b-x}{b}\right).$$

On auroit pu aussi terminer le calcul par la transformation indiquée ci-dessus, $\sqrt{(b^2 - z^2)} = b - uz$; ce qui auroit donné $\frac{2du}{u^2 + 1}$, d'où $c' - 2$ arc (tang $= u$) pour intégrale.

De même en faisant $x = z - a$, dans

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$$

qui est l'équation de la *Chaînette*, (*V.* ma Méca. n°. 92) on a $dy = \frac{adz}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$, d'où on tire

$$y = a \log c\,\{x + a + \sqrt{(2ax + x^2)}\}.$$

4. *Différentielles binomes.*

720. Proposons-nous d'intégrer

$$K\,x^m dx\,(a + bx^n)^p$$

m, n, p étant quelconques, entiers ou fractionnaires,

positifs ou négatifs (*), on supposera

$$z = a + bx^n$$

d'où $x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$: élevant les deux membres à la puissance $m + 1$, et différentiant, il viendra

$$x^m dx = \frac{(z-a)^{\frac{m+1}{n} - 1}}{nb^{\frac{m+1}{n}}} dz$$

en substituant, la fonction proposée devient

$$\frac{K}{nb^{\frac{m+1}{n}}} (z-a)^{\frac{m+1}{n} - 1} z^p dz$$

Or il est clair que si l'exposant de $z - a$ est entier, on sait intégrer la fonction. Si $\frac{m+1}{n} = 1$, on a $z^p dz$ à intégrer : si $\frac{m+1}{n} - 1$ est positif et $= h$, on aura une suite de monomes, en développant $(z-a)^h z^p dz$: enfin si..... $\frac{m+1}{n} - 1$ est négatif on aura une fraction rationnelle. Donc *toutes les fois que l'exposant de* x *hors du binome, augmenté de un, est divisible par celui de* x *dans le binome, on sait intégrer la fonction.*

Ce cas n'est pas le seul où on sache intégrer ; en

(*) On pourroit rendre aisément m et n entiers par le procédé (716). Ainsi $x^{\frac{1}{3}} dx (a + bx^{\frac{1}{2}})^p$, en faisant $x = z^6$ devient $6z^7 dz (a + bz^3)^p$. Mais cette transformation n'est nullement nécessaire pour ce qui va être dit.

divisant le binome proposé par x^n et multipliant hors du binome par x^{np}, on a

$$Kx^{m+np}(b+ax^{-n})^p$$

Or en reproduisant ici le théorême précédent, il est clair que cette expression sera intégrable quand $\frac{m+np+1}{-n}$ ou plutôt quand $\frac{m+1}{n}+p$ sera entier. Ainsi lorsque la condition indiquée précédemment ne sera pas remplie, on ajoutera p au résultat fractionnaire obtenu $\frac{m+1}{n}$, et si la somme est entière, la fonction sera intégrable par cette voie.

721. Nous ferons remarquer que si p est fractionnaire (et ce cas est le plus important, puisque sans cela on n'auroit à intégrer qu'une suite de monomes), en supposant que q est le dénominateur de p, il sera plus facile de faire le calcul, en faisant $a+bx^n=z^q$.

On demande, par exemple, d'intégrer

$$x^{-2}dx\,(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}$$

$\frac{m+1}{n}$ est ici $-\frac{1}{3}$; mais si on ajoute $-\frac{5}{3}$, on trouve -2; il faut donc pour intégrer, multiplier et diviser par $(x^3)^{-\frac{5}{3}}$ ou x^{-5} et on a

$$x^{-7}dx\,(1+ax^{-3})^{-\frac{5}{3}}.$$

On fera $1+ax^{-3}=z^3$, d'où $x=\left(\frac{z^3-1}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$; puis élevant à la puissance -6 et différentiant, on trouve $x^{-7}\,dx$; d'où

$$-\frac{1}{a^2}\,(1-z^{-3})dz$$

dont l'intégrale est $-\frac{1}{a^2}(z+\frac{1}{2}z^{-2})=c-\frac{3x^3+2a}{2a^2x\sqrt[3]{(x^3+a)^2}}$

De même $x^3dx\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}$ deviendra $\frac{3}{2}\,dz\,(z^6-a^2z^3)$, en faisant $a^2+x^2=z^3$; on conclura pour l'intégrale de la proposée $\frac{3}{56}\sqrt[3]{(a^2+x^2)^4}\,(4x^2-3a^2)+c$.

722. Lorsque les conditions d'intégrabilité ne sont pas remplies, on cherche à faire dépendre l'intégrale demandée d'une autre qui soit plus facile à obtenir : c'est ce qu'on fait à l'aide de l'intégration par parties (712, V). Intégrons donc $x^m dx.z^p$, en supposant d'abord z constant, nous aurons

$$\int x^m dx.z^p=\frac{x^{m+1}z^p}{m+1}-\frac{p}{m+1}.\int z^{p-1}x^{m+1}dz$$

d'où $$\int x^m dx.z^p=\frac{x^{m+1}z^p}{m+1}-\frac{nbp}{m+1}\int x^{m+n}dx.z^{p-1}\ldots(1)$$

à cause de $z=a+bx^n$ et $dz=nbx^{n-1}\,dx$. Mais.... $z^p=z^{p-1}z=z^{p-1}(a+bx^n)$; donc

$$\int x^m dx.z^p=a\int x^m dx.z^{p-1}+b\int z^{p-1}x^{m+n}dx\ldots(2)$$

égalant les valeurs (1) et (2), on trouve

$$b(m+1+np)\int z^{p-1}x^{m+n}dx=x^{m+1}z^p-a(m+1)\int z^{p-1}x^m dx\ldots(3)$$

changeons $p-1$ en p et $m+n$ en m, nous aurons

$$\int x^m dx.z^p=\frac{z^{m-n+1}z^{p+1}-a(m-n+1)\int x^{m-n}z^p dx}{b(m+1+np)}\ldots(A)$$

en mettant pour le dernier terme de l'équation (2) sa valeur que donne celle (3), on obtient

$$\int x^m dx z^p=\frac{z^p x^{m+1}+anp\int x^m dx\,.\,z^{p-1}}{m+1+np}\ldots(B)$$

723. Voici l'usage de ces diverses formules dans lesquelles

$$z = a + bx^n.$$

1°. L'équation A fait dépendre l'intégrale de $x^m dx . z^p$ de celle de $x^{m-n} z^p dx$: *elle sert à diminuer l'exposant de* x *hors du binome* de n unités par une 1re. opération, puis celle-ci de n, par une 2e., etc.; en sorte que l'intégrale proposée dépendra de celle de $x^{m-in} z^p dx$, i étant un nombre entier positif.

2°. La formule B sert au contraire *à diminuer l'exposant* p *du binome*, de 1, 2, 3 . . . i unités.

3°. En résolvant les équations A et B par rapport au terme à intégrer du 2e. membre, on obtient, en changeant $m - n$ en m dans A et $p - 1$ en p dans B,

$$\int x^m dx . z^p = \frac{x^{m+1} z^{p+1} - b(m + np + n + 1) \int x^{m+n} z^p dx}{a(m+1)} \ldots (C)$$

$$\int x^m dx . z^p = \frac{-x^{m+1} z^{p+1} + (m + np + n + 1) \int x^m dx z^{p+1}}{an(p+1)} \ldots (D)$$

Ces formules servent au contraire à augmenter les exposans de x hors du binome et celui du binome, ce qui est utile lorsque l'un ou l'autre est négatif.

4°. On pourra donc remarquer la loi des exposans de x dans le résultat d'une intégration proposée. Ainsi pour $\frac{x^6 dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$, il sera facile de voir que le résultat a la forme $(Ax^4 + Bx^2 + C) \sqrt{(1 - x^2)}$. On évitera donc si on veut l'usage assez pénible de nos formules, en égalant les différentielles de ces quantités, comparant ensuite terme à terme, comme dans la méthode des coefficiens indéterminés (714), ce qui fera connoître A B C.

724. Nous donnerons ici un procédé d'intégration qui

est remarquable par sa simplicité et par les nombreuses circonstances où il peut être appliqué. Différentions la fonction $x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}$; nous aurons

$$d\{x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}\}=(n-1)\,x^{n-2}\sqrt{(1-x^2)}\,dx-\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

multiplions et divisons le 1er. terme de cette différentielle, par $\sqrt{(1-x^2)}$ il viendra

$$d\{x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}\}=(n-1)\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{nx^n dx}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

enfin intégrant et transposant, on a

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}}{n}+\frac{n-1}{n}\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\ldots(E).$$

En appliquant le même genre de calcul à $x^{n-1}\sqrt{(x^2\pm 1)}$, on trouve

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(x^2\pm 1)}}=\frac{x^{n-1}\sqrt{(x^2\pm 1)}}{n}\mp\frac{n-1}{n}\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(x^2\pm 1)}}\ldots(F).$$

Ces formules servent à intégrer toute fonction affectée du radical $\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$, puisqu'on peut la ramener à la forme $\frac{z^n dz}{\sqrt{(a^2\pm z^2)}}$ ou $\frac{z^n dz}{\sqrt{(z^2\pm a^2)}}$ (719). Il est même facile, en divisant haut et bas par a, de changer le radical en $\sqrt{(1\pm x^2)}$ ou $\sqrt{(x^2\pm 1)}$. Or les expressions E et F serviront à faire dépendre, en dernière analyse, l'intégrale cherchée de

$$\int\frac{x dx}{\sqrt{(x^2\pm 1)}}\ \text{ou}\ \int\frac{x dx}{\sqrt{(1\pm x^2)}}\ldots\ \text{si } n \text{ est impair,}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2\pm 1)}}\ \text{ou}\ \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\ldots\ \text{si } n \text{ est pair.}$$

Les deux 1res. rentrent dans la règle IV, n°. 712; la 3e. a été donnée 717; la 4e. est l'arc (sin $= x$).

Par exemple, on a

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)} + c$$

$$\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{x^2}{3} + \frac{1.2}{1.3}\right)\sqrt{(1-x^2)} + c$$

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc}\,(\sin = x) + c$$

$$\int \frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{x^3}{4} + \frac{1.3\,x}{2.4}\right)\sqrt{(1-x^2)} + \frac{1.3.}{2.4}\,\mathrm{arc}\,(\sin = x) + c.$$

725. Cependant si l'exposant n étoit négatif, on ne pourroit plus appliquer les formules E et F; mais en faisant $x = \frac{1}{z}$, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{-z^{n-1}\mathrm{d}z}{\sqrt{(z^2-1)}}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{(x^2 \pm 1)}} = -\frac{z^{n-1}\mathrm{d}z}{\sqrt{(1 \pm z^2)}}.$$

On pourroit aussi intégrer directement ces formules par un calcul semblable à celui ci-dessus; car en différentiant $x^{n+1}\sqrt{(1-x^2)}$, etc., on trouve

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{-\sqrt{(1-x^2)}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-2}\sqrt{(1-x^2)}} \ldots (G)$$

formule dont l'usage est facile à concevoir. On a d'ailleurs

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(1-x^2)}} = c - \log\left\{\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right\},$$

(718). On trouvera de même

$$\int \frac{x^m\mathrm{d}x}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = -\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{(2m-1)a}{m}\int \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{(2ax-x^2)}} \ldots (H)$$

5. *Des Fonctions exponentielles.*

726. Il suit des règles de la différentiation (647) que

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}.$$

On saura donc intégrer deux des cas particuliers que peuvent présenter les exponentielles.

1°. Si $z = f(a^x)$, la fonction $za^x dx$, en faisant $a^x = u$, deviendra $F(u)\,du$, à cause de $x = \frac{\log u}{\log a}$. Ainsi. . .

$$\frac{a^x dx}{\sqrt{(1 + a^{nx})}} \text{ sera changée en } \frac{1}{\log a}.\frac{du}{\sqrt{(1+u^n)}}.$$

2°. En différentiant ze^x, on a $e^x dx(z + z')$; en sorte que toute fonction exponentielle, pour laquelle le facteur de $e^x dx$ est formé de deux parties, dont l'une est la dérivée de l'autre, sera facile à intégrer. Par exemple,

$$\int e^x dx(3x^2 + x^3 - 1) = (x^3 - 1)e^x.$$

De même $\int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2}$, en faisant $1 + x = z$ se transforme en $\int \frac{e^z}{e}\left(\frac{dz}{z} - \frac{dz}{z^2}\right) = \frac{e^z}{ez} = \frac{e^x}{1+x} + c.$

727. Mais dans tout autre cas on devra recourir à l'intégration par parties (règle V, n°. 712). Par exemple, pour $x^n dx.a^x$, on regardera d'abord x^n comme constant, et on aura

$$\int x^n dx.a^x = \frac{a^x.x^n}{\log a} - \frac{n}{\log a}\int a^x x^{n-1} dx;$$

en traitant de même $a^x x^{n-1} dx$, et ainsi de suite de proche en proche, on aura

$$a^x x^n dx = a^x\left(\frac{x^n}{\log a} - \frac{nx^{n-1}}{\log^2 a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\log^3 a} - \ldots \pm \frac{1.2.3\ldots n}{\log^{n+1} a}\right) + c.$$

Il est évident que le même calcul s'appliquera à $za^x dx$, z étant une fonction algébrique et entière de x. Ainsi on aura

$$\int za^x dx = \frac{za^x}{\log a} - \int \frac{a^x z' dx}{\log a}.$$

728. Mais si l'*exposant* n *est négatif*, en réfléchissant sur l'esprit de la méthode qui vient d'être employée, on verra qu'il faudroit au contraire faire croître successivement l'exposant de x. On intégrera donc en regardant d'abord a^x comme constant, et il viendra

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = \frac{-a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\log a}{n-1}\int \frac{a^x dx}{x^{n-1}};$$

en faisant ici le même raisonnement, on réduira la fonction à la forme

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = \frac{-a^x}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{\log a}{(n-2)x^{n-2}} + \frac{\log^2 a}{(n-2)(n-3)x^{n-3}} \ldots + \frac{\log^{n-2} a}{1.2.3\ldots(n-2)\,x}\right) + \frac{\log^{n-1} a}{2.3\ldots(n-1)}\int \frac{a^x dx}{x};$$

mais ici on ne peut pousser plus loin le calcul, parce qu'il faudroit ci-dessus faire $n = 1$, et qu'on trouveroit l'infini ; langage dont l'algèbre se sert pour indiquer qu'il y a absurdité. L'intégrale $\int \frac{a^x dx}{x}$ a longtems exercé les analystes, et on est forcé de la regarder comme une transcendante d'une espèce particulière, qui ne peut dépendre des arcs de cercle ni des logarithmes. A défaut de méthode rigoureuse, on emploie les séries ; on a (647)

$$\frac{a^x}{x} = \frac{1}{x} + \log a + \frac{\log^2 a}{2}\, x + \frac{\log^3 a}{2.3}\, x^2 + \ldots$$

Multipliant par dx, et intégrant chaque terme, il vient

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \log x + x \log a + \frac{x^2 \log^2 a}{2.2} + \frac{x^3 \log^3 a}{3.2.3} + \ldots + c.$$

729. Si n étoit fractionnaire, l'une ou l'autre des méthodes précédentes serviroit à réduire l'exposant de x à être compris entre 0 et 1 ou -1, et le développement en série (728, 743) serviroit ensuite à donner par approximation l'intégrale cherchée.

Tout ce qu'on a dit ici peut également s'appliquer à $za^x dx$, lorsque z est une fonction quelconque algébrique de x.

6. *Des Fonctions logarithmiques.*

730. Proposons-nous d'intégrer $z dx . \log^n x$, z étant une fonction quelconque algébrique de x.

Si n est entier et positif, on intégrera par parties en regardant d'abord $\log^n x$ comme constant, il viendra

$$\int z dx \log^n x = \log^n x \int z dx - n \int \log^{n-1} x \, . \, \frac{dx}{x} \int z dx,$$

et comme $\int z dx$ est supposée connue par les principes antérieurs, on voit que l'intégration proposée est réduite à celle d'une fonction de même forme, où l'exposant du logarithme est moindre. Le même calcul appliqué à celle-ci, et de proche en proche, aux suivantes, achevera l'intégration.

Ainsi pour $x^m \log^n x . dx$, on a

$$\int x^m dx.\log^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log^n x - \frac{n}{m+1}\int \log^{n-1} x.x^m dx$$

$$\int x^m dx \log^{n-1} x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log^{n-1} x - \frac{n-1}{m+1}\int \log^{n-2} x.x^m dx,$$

et ainsi de suite. En réunissant ces résultats successifs, on trouvera

$$\int x^m \log^n x.dx = x^{m+1}\left(\frac{\log^n x}{m+1} - \frac{n\log^{n-1} x}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1)\log^{n-2} x}{(m+1)^3} \ldots\right) + c$$

731. Mais *si* n *est entier et négatif*, on verra comme précédemment (728) que pour faire croître au contraire l'exposant du logarithme, il faut dans l'intégration par parties, prendre d'abord z constant dans $\int z dx \log^n x$. Pour cela comme

$$\int \frac{dx}{x}.\log^n x = \frac{\log^{n+1} x}{n+1},$$

on partagera $z dx.\log^n x$ en ces deux facteurs zx, et. . . $\frac{dx}{x}.\log^n x$, d'où on tirera

$$\int \frac{z dx}{\log^n x} = \frac{zx}{-n+1}\log^{-n+1} x + \frac{1}{n-1}\int \log^{-n+1} x.d(zx)$$

formule qui remplit visiblement le but qu'on veut atteindre. Mais pour mieux voir la nature des obstacles qu'on rencontre, appliquons ceci à $\int \frac{x^m dx}{\log^n x}$, on aura

$$\int \frac{x^m dx}{\log^n x} = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)\log^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{\log^{n-1} x},$$

et opérant de même sur ce dernier terme, etc., puis réunissant ces divers résultats; on aura

$$\int\frac{x^m dx}{\log^n x}=-\frac{x^{m+1}}{n-1}\left\{\frac{1}{\log^{n-1}x}+\frac{m+1}{n-2}\cdot\frac{1}{\log^{n-2}x}+\frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)}\cdot\frac{1}{\log^{n-3}x}+\ldots\right\}+\frac{(m+1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\int\frac{x^m dx}{\log x}.$$

Nous sommes obligés de nous arrêter ici ; car nous ne pourrions prendre $n=1$, dans notre formule, sans y introduire l'infini. Mais faisons

$$x^{m+1}=z,\quad \text{d'où } (m+1)\,x^m dx=dz.$$

Il vient
$$\frac{x^m dx}{\log x}=\frac{dz}{\log z}=\frac{e^u du}{u},$$

en posant $\log z=u$. On reproduit donc ici la fonction du n°. 728, qu'on ne sait intégrer que par séries.

732. *Lorsque* n *est fractionnaire*, soit positif, soit négatif, l'une ou l'autre de ces formules ramène l'intégrale de $zdx.\log^n dx$, à celle d'une fonction de même forme, n étant compris entre 1 et -1. Après quoi il faut recourir au développement en séries (728, 743).

7. *Des Fonctions circulaires.*

733. S'il entre des arcs dans une fonction, pour l'intégrer, on remarquera que la différentielle de ces arcs est algébrique, et que par conséquent si on pratique l'intégration par parties, en regardant ces arcs d'abord comme constans (712, règle V), la fonction proposée en sera exempte. Ainsi, z étant une fonction de x, on a

$$\int zdx.\text{arc}\,(\sin=x)=\text{arc}\,(\sin=x)\int zdx-\int\frac{dx.\int zdx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

De même on trouvera

$$\int zdx.\text{arc}\,(\tang=x)=\text{arc}\,(\tang=x)\int zdx-\int\frac{dx.\int zdx}{1+x^2}.$$

734. Mais lorsque les fonctions renferment des lignes trigonométriques, il y a plusieurs manières de les intégrer, qui offrent, tantôt plus, tantôt moins d'avantages. Nous allons exposer les principales.

Ire. *méthode*. On peut toujours ramener ces fonctions aux différentielles binomes, en faisant sin x ou cos $x = z$. En effet, soit

$$\sin x = z, \quad \cos x = \sqrt{(1 - z^2)}, \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}};$$

d'où $\qquad \sin^m x . \cos^n x dx = z^m dz . \sqrt{(1 - z^2)}^{n-1}$.

1°. Si n est impair, le radical disparoît.

2°. Si m est impair, la 1re. condition d'intégrabilité (720) est remplie, puisque $\frac{1}{2}(m + 1)$ est entier.

3°. Si m et n sont pairs, la 2e. condition (710) est satisfaite, puisque $\frac{m+n}{2}$ est entier.

On trouvera par exemple

$$\int \sin^4 x . \cos^3 x dx = \int z^4 dz\,(1 - z^2) = \tfrac{1}{5}\sin^5 x - \tfrac{1}{7}\sin^7 x + c$$

$$\int \sin^3 x dx = \int \frac{z^3 dz}{\sqrt{(1 - z^2)}} = -\tfrac{1}{3}\cos x\,(3 - \cos^2 x) + c$$

$$\int \sin^4 x dx = \int \frac{z^4 dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\tfrac{1}{4}(\sin^3 x + \tfrac{3}{2}\sin x)\cos x + \frac{1.3x}{2.4} + c.$$

735. IIe. *méthode*. Il suit du n°. 651, 3°, que

$$\int dx . \cos kx = \frac{1}{k} \sin kx + c$$

$$\int dx . \sin kx = -\frac{1}{k} \cos kx + c;$$

or, on a appris, n°. 586, à développer toute puissance de sin x et cos x en séries, suivant les multiples de l'arc x;

on aura donc à intégrer une suite de termes de la forme ci-dessus. Par exemple,

$$\int \cos^5 x . dx = \int (\tfrac{1}{16}\cos 5x + \tfrac{5}{16}\cos 3x + \tfrac{5}{8}\cos x)\, dx$$
$$= \tfrac{1}{80}\sin 5x + \tfrac{5}{48}\sin 3x + \tfrac{5}{8}\sin x + c.$$

On emploie souvent cette méthode, parce que quand on veut obtenir des solutions numériques, ce qui est le cas le plus ordinaire, il faut préférer les sinus et cosinus des multiples des arcs, aux puissances de ces lignes.

736. IIIe. *méthode*. Les formules (I, 580) serviront aussi à traduire en exponentielles les sinus, cosinus..., ce qui ramènera l'intégrale de ceux-ci à celle des premières (726).

737. La IVe. *méthode* consiste dans l'intégration par parties. Comme $-dx \sin x$ est la différentielle de $\cos x$, décomposons le produit $\sin^m x . \cos^n x . dx$, en ...... $dx . \sin x . \cos^n x \times \sin^{m-1} x$; le 1er. facteur ayant pour intégrale $-\dfrac{\cos^{n+1} x}{n+1}$, on obtient

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = -\frac{\sin^{m-1} x}{n+1}\cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{n+2} x \sin^{m-2} x . dx.$$

mettons pour $\cos^{n+2} x$, sa valeur $\cos^n x . \cos^2 x$ ou. . . . $\cos^n x\,(1 - \sin^2 x)$; transposant, il vient

$$\int dx \sin^m x . \cos^n x = -\frac{\sin^{m-1} x . \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int dx . \sin^{m-2} x . \cos^n x \ldots (I)$$

En opérant par rapport au cosinus de la même manière que nous venons de le faire pour le sinus, on aura

$$\int dx \sin^m x . \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int dx . \sin^m x . \cos^{n-2} x \ldots (K)$$

L'une de ces formules abaisse l'exposant du sinus, l'autre remplit le même but pour le cosinus; leur usage com-

biné et successif donne l'intégrale *lorsque* m *et* n *sont entiers et positifs*. Par exemple, on a

$$\int dx \sin^3 x \cos^2 x = -\tfrac{1}{5}\sin^2 x \cos^3 x + \tfrac{2}{5}\int dx \sin x \cos^2 x$$

$$\int dx \sin x \cos^2 x = \tfrac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \tfrac{1}{3}\int dx \sin x$$

or, ce dernier terme $= -\frac{1}{3}\cos x + c$; réunissant ces diverses parties, on a

$$\int dx \sin^3 x \cos^2 x = \cos x(-\tfrac{1}{5}\sin^2 x \cos^2 x + \tfrac{2}{15}\sin^2 x - \tfrac{2}{15}) + c.$$

738. Mais si m ou n est négatif, ces formules exigent quelque modification. La 1re. donne

$$\int \frac{dx \sin^m x}{\cos^n x} = -\frac{\sin^{m-1} x}{(m-n)\cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{dx \sin^{m-2}}{\cos^n x} \ldots (L)$$

qui fera, comme on voit, dépendre l'intégrale cherchée, de celle de $\dfrac{dx \sin x}{\cos^n x}$ ou $\dfrac{dx}{\cos^n x}$ selon que m est impair ou pair. L'une de ces intégrales s'obtient en faisant $\cos x = z$, ce qui donne $-\int \frac{dz}{z^n}$; l'autre va être donnée.

La seconde de nos formules, en faisant n négatif, et résolvant par rapport au dernier terme, puis changeant n en $2-n$, donne

$$\int \frac{dx \sin^m x}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{dx . \sin^m x}{\cos^{n-2} x} \ldots (M)$$

L'intégrale demandée se ramène donc à celle de $dx \sin^m x$, ou à $\dfrac{dx \sin^m x}{\cos x}$, selon que n est pair ou impair. La 1re. va être donnée, la 2e. l'est par la formule (I).

739. Si on fait n ou m nul, on a

$$\int \sin^m x \, dx = \frac{-\cos x . \sin^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx \sin^{m-2} x$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\sin x . \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int dx \cos^{n-2} x$$

$$\int\frac{dx}{\sin^m x}=\frac{-\cos x}{(m-1)\sin^{m-1}x}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{\sin^{m-2}x}$$

$$\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$$

Au lieu de déduire ainsi toutes ces formules des deux premières, on pourroit les trouver directement. Il suffiroit pour cela de réfléchir à la nature de l'intégration par parties, et au but qu'on s'y doit proposer.

On pourroit encore intégrer d'une autre manière les fractions $\frac{\cos^m x.dx}{\sin^n x}$ et $\frac{\sin^m x.dx}{\cos^n x}$: car la 1re., par exemple, si m est pair et $=2h$, équivaut à $\frac{(1-\sin^2 x)^h dx}{\sin^n x}$; développant $(1-\sin^2 x)^h$, on a une suite de termes de la forme $\sin^k x.dx$. Si m est impair et $=2h+1$, on a

$$\frac{\cos^{2h}x.\cos x.dx}{\sin^n x}=\frac{(1-z^2)^h dz}{z^n},$$

en faisant $\sin x=z$.

740. Pour le cas où les exposans du sinus et du cosinus sont à la fois négatifs, on multipliera le numérateur par $\cos^2 x+\sin^2 x$, et on aura

$$\int\frac{dx}{\sin^m x.\cos^n x}=\int\frac{dx}{\sin^{m-2}x.\cos^n x}+\int\frac{dx}{\sin^m x.\cos^{n-2}x}.$$

On parviendra donc à des fractions dégagées de $\sin x$ ou de $\cos x$. Si $m=n$, comme $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, la fraction proposée se change en

$$\int\frac{dx}{\cos^n x.\sin^n x}=2^{n-1}\int\frac{dz}{\sin^n z},$$

en faisant $2x=z$.

741. Nous intégrerons à part cinq fonctions circulaires, soit parce qu'elles offrent des calculs plus simples, soit parce que nos formules y ramènent toutes les autres.

1°. Soit $\frac{dx}{\sin x}$; en faisant $\cos x = z$, on a $-\frac{dz}{1-z^2}$, fraction rationnelle (713, Ier. *cas*); d'où

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log c + \tfrac{1}{2} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x};$$

et, comme (359) $\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; on a

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \frac{c\sqrt{(1-\cos x)}}{\sqrt{(1+\cos x)}} = \log. \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x + c.$$

2°. Un calcul semblable, en faisant $\sin x = z$, donne

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \frac{c\sqrt{(1+\sin x)}}{\sqrt{(1-\sin x)}} = \log. \operatorname{tang} (50^{\circ} + \tfrac{1}{2} x) + A.$$

3°. Pour $\frac{dx . \cos x}{\sin x}$, comme le numérateur est la différentielle du dénominateur (712, règle III), on a

$$\int \frac{dx \cos x}{\sin x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tang} x} = \int dx . \cot x = \log (c \sin x).$$

4°. On a de même

$$\int \frac{dx \sin x}{\cos x} = \int dx . \operatorname{tang} x = \int \frac{dx}{\cot x} = \log \frac{c}{\cos x}.$$

5°. En ajoutant ces deux formules, on trouve

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log \frac{c \sin x}{\cos x} = \log (c \operatorname{tang} x).$$

8. *Constantes arbitraires; Intégration par séries.*

742. Soit P l'intégrale d'une fonction $z\mathrm{d}x$ de x, ou $\mathrm{d}P = z\mathrm{d}x$, et c la constante arbitraire qu'on doit ajouter pour qu'elle soit la plus générale possible (711), on a

$$\int z\mathrm{d}x = P + c.$$

Tant qu'il ne s'agit que d'un calcul, c reste quelconque ; mais lorsqu'on veut appliquer cette intégrale à une question déterminée, la constante c cesse d'être arbitraire, et doit satisfaire à des conditions prescrites. Si,
22. par exemple, on demande l'aire $BCPM = t$ comprise entre les ordonnées BC PM dont la position répond aux abscisses a et b, comme (682) on a $\mathrm{d}t = y\mathrm{d}x$, ... $t = \int y\mathrm{d}x = P + c$. Or, l'aire $P + c$ commençant lorsque $x = AC = a$, t doit être nul lorsqu'on fera $x = a$ dans $P + c$, ou $A + c = 0$, A étant la valeur que prend la fonction de x désignée par P lorsque $x = a$; on tire de là $c = -A$, d'où l'aire $t = P - A$. Il restera ensuite à mettre b pour x, et l'aire sera renfermée dans les limites prescrites.

C'est toujours de cette manière qu'on doit déterminer la constante arbitraire. On établit d'après les conditions de la question, quelle valeur k doit prendre l'intégrale $t = P + c$ lorsque $x = a$, et on a $k = A + c$, d'où

$$c = k - A \quad \text{et} \quad t = P + k - A,$$

sans qu'il soit, comme on voit, nécessaire de connoître l'*origine de l'intégrale*, c.-à-d., pour quelle valeur a de x elle est nulle.

Toute intégrale dont l'origine n'est pas fixée, se nomme *Indéfinie*; elle n'est *Complète* que quand elle renferme

une constante arbitraire. Lorsque les limites a et b sont données, l'intégrale *Définie* est $B-A$, B étant la valeur que prend P lorsque $x=b$. En remarquant la forme de cette expression, il est visible que pour l'obtenir, il suffit de *faire* x $=a$ *et* x $=$ b *dans l'intégrale indéfinie* P, *et de retrancher le premier résultat du second.* Tout ceci s'éclaircira bientôt.

743. Lorsqu'une fonction proposée n'est pas susceptible d'une intégration exacte, on a recours aux approximations. Ainsi pour trouver $\int z\mathrm{d}x$, on développera z en série, suivant les puissances ascendantes ou descendantes de x (658, 668); puis multipliant chaque terme par $\mathrm{d}x$, on l'intégrera. Nous n'en donnerons que deux exemples.

1°. Soit $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; cette intégrale est arc $(\tang=x)$. En développant $(1+x^2)^{-1}$, on a (481).

$$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\mathrm{d}x\,(1-x^2+x^4-x^6+\ldots),$$

d'où arc $(\tang=x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\ldots\ldots$

2°. Pour $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}=$ arc $(\sin=x)$, on développera $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, ce qui donne $1+\frac{x}{2}+\frac{1.3x^4}{2.4}\ldots$ (485); d'où

$$\text{arc}\,(\sin=x)=x+\frac{x^3}{2.3}+\frac{3x^5}{2.4.5}+\frac{3.5.x^7}{2.4.6.7}+\ldots$$

On n'a pas ajouté de constante, parce qu'on suppose que l'arc dont il s'agit ici est le plus petit de ceux dont x est le sinus ou la tangente, et qu'alors, quand ils sont nuls, l'arc l'est aussi. La première de ces formules a servi (581) à trouver le rapport π de la circonférence au diamètre; on peut employer la deuxième au même

usage, car le tiers du quadrans ayant $\frac{1}{2}$ pour sinus, en faisant $x=\frac{1}{2}$, on aura

$$\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3.2^3}+\frac{1.3}{2.4.5.2^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7}\dots$$

Du reste, la loi de ces séries suit du calcul même qui les donne.

744. Pour qu'une série soit de quelqu'usage dans les applications numériques, il faut qu'elle converge : il est donc convenable d'avoir divers procédés pour effectuer ces sortes d'intégrations. La suivante est due à Jean Bernoulli.

Faisons $h=-x$ dans la formule de Taylor; comme $f(x-x)$ ou fo est ce que devient y ou fx lorsque $x=0$, fo est une constante b; donc

$$b=y-y'x+\tfrac{1}{2}y''x^2-\text{etc.};$$

or, la dérivée de y étant donnée, il s'agit de trouver y; soit donc $\int z\text{d}x$ l'intégrale cherchée, $z=y'$, $z'=y''$,... et on trouve

$$y=\int z\text{d}x=b+zx-\tfrac{1}{2}z'x^2+\tfrac{1}{6}z''x^3-\text{etc.},$$

et, il suit de ce qu'on a vu (661), qu'on peut obtenir des limites de la somme des termes négligés.

Par exemple, pour $\int\frac{\text{d}x}{a+x}=\log(a+x)$, on a

$$b=\log a,\ z=\frac{1}{a+x},\ z'=\frac{-1}{(a+x)^2},\ z''=\frac{2}{(a+x)^3}\dots$$

$$\text{et}\ \log(a+x)=\log a+\frac{x}{a+x}+\frac{x^2}{2(a+x)^2}+\frac{x^3}{3(a+x)^3}\dots$$

745. La formule de Taylor donne aussi

$$f(x+h)-fx=zh+\tfrac{1}{2}z'h^2+\tfrac{1}{6}z''h^3\dots\dots$$

d'où $f(x+b-a)-fx=z(b-a)+\frac{1}{2}z'(b-a)^2+\dots$ en faisant $h=b-a$. Si on prend ensuite $x=a$, ce

qui change $z\ z'\ z''$.... en des constantes $A\ A'\ A''$...
on obtient

$$\int b - \int a = A\,(b-a) + \tfrac{1}{2} A'\,(b-a)^2 + \tfrac{1}{6} A''\,(b-a)^3 \ldots$$

c'est l'intégrale $\int z dx$ entre les limites $x=a$ et $x=b$ (742). Mais pour que cette série soit applicable, il faut que celle de Taylor ne soit pas fautive. On examinera donc la marche de la fonction z depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$, et si elle devient infinie pour de certaines valeurs, on partagera cette variable x en autant de parties séparées par les termes auxquels répondent les valeurs infinies de la fonction z, et on appliquera séparément la série à chacune de ces parties ; on pourra même la faire converger autant qu'on voudra ; car, partageant l'intervalle $b-a$ en n parties égales i, en sorte que $b-a=ni$: on prendra d'abord l'intégrale entre les limites a et $a+i$, c.-à-d. qu'on mettra ci-dessus $a+i$ pour b.

De même on prendra l'intégrale depuis $a+i$ jusqu'à $a+2i$; ensuite depuis cette quantité jusqu'à $a+3i$.... on fera donc successivement

$x=a$, ce qui changera $z\ z'\ z''$... en $A\ A'\ A''$.....
$x=a+i$ . . . . $B\ B'\ B''$.....
$x=a+2i$ . . . . $C\ C'\ C''$.....
etc. ;

d'où $\int(a+i) - \int a = Ai + \tfrac{1}{2}A'i^2 + \tfrac{1}{6}A''i^3 + \ldots$

$$\int(a+2i) - \int(a+i) = Bi + \tfrac{1}{2}B'i^2 + \tfrac{1}{6}B''i^3 + \ldots$$
$$\int(a+3i) - \int(a+2i) = Ci + \tfrac{1}{2}C'i^2 + \tfrac{1}{6}C''i^3 + \ldots$$
etc.....
$$\int(a+ni) - \int(a+(n-1)i) = Mi + \tfrac{1}{2}M'i^2 + \tfrac{1}{6}M''i^3 + \ldots$$

746. La somme de ces équations est

$$\int(a+ni) - \int a = \int b - \int a = \int z dx =$$
$$(A+B+C\ldots+M)i + \tfrac{1}{2}(A'+B'\ldots+M')i^2 + \tfrac{1}{6}(A''+\ldots+M'')i^3\ldots$$

telle est l'intégrale de $\int z\mathrm{d}x$ entre les limites de a à b. Si on prend i assez petit pour se borner au 1er. terme, on a

$$\int z\mathrm{d}x = Ai + Bi + Ci \ldots\ldots + Mi,$$

série dont les divers termes sont les valeurs que prend successivement la fonction $z\mathrm{d}x$, lorsqu'on fait x égal à a, $a+i$, $a+2i$,...... C'est pour cela que dans la méthode infinitésimale on regarde l'intégrale comme la *Somme* d'un nombre infini d'élémens, qui sont les valeurs consécutives que prend la fonction lorsqu'on fait passer la variable par toutes les valeurs intermédiaires entre ses limites : c'est ce qui s'éclaircira par la suite (749).

747. Nous ne dirons rien des intégrations du 2e., 3e..... ordre, puisqu'elles rentrent dans ce qu'on a exposé. Il y a alors 2,3.... constantes arbitraires (*V.* no. 773).

Par exemple, pour $\iint \frac{(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x^2}{(x^2+a^2)^2}$, on intégrera une première fois; et comme la fraction proposée se décompose (715) en $\frac{2a^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$, et que la 1re. donne (713, 4o.) $\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$: il reste à intégrer de nouveau $\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+a^2} + c\mathrm{d}x$. On a donc

$$\iint \frac{(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \log\sqrt{(x^2+a^2)} + cx + c'.$$

9. *Des Quadratures et Rectifications.*

748. L'aire t d'une courbe plane (682) est $=\int y\mathrm{d}x$, et il s'agit d'intégrer cette expression entre les limites convenables; c'est pour cela qu'on a donné le nom de

Méthode des Quadratures aux procédés qui nous ont occupés jusqu'ici, par lesquels on obtient l'intégrale des fonctions d'une seule variable. En voici divers exemples.

I. Pour la parabole AM, $y^2=2px$, donc 51.

$$t=\int\sqrt{(2p)}.x^{\frac{1}{2}}dx=\tfrac{2}{3}\sqrt{(2p)}.x^{\frac{3}{2}}+c=\tfrac{2}{3}xy+c.$$

Si l'aire doit partir du sommet A, $x=0$ donne $t=0$, ainsi c est nul ; donc l'*aire* MAM′ *d'un segment de parabole, est les deux tiers du rectangle circonscrit* M′N.

Si l'aire est comprise entre BC et PM, en faisant $AB=a$, $BC=b=\sqrt{(2pa)}$, t est nul lorsque $x=a$, d'où $c=-\frac{2}{3}ab$, puis $t=\frac{2}{3}(xy-ab)$. L'aire $C'CMM'$ est les deux tiers de la différence des rectangles $N'M$ et $D'C$.

En général, pour les paraboles de tous les degrés $y^m=ax^n$, on a $t=\dfrac{mxy}{m+n}$. Toutes ces courbes sont donc *carrables*.

II. Pour l'hyperbole équilatère MN entre ses asymptotes Ax Ay, on a $xy=m^2$; donc 52.

$$t=\int y\,dx=m^2\int\frac{dx}{x}=m^2\log x+c\,;$$

l'aire t ne peut être prise depuis l'axe Ay, parce que $x=0$ donneroit $t=0$ et $c=-m^2\log 0=\infty$. Mais si l'aire doit commencer à l'ordonnée BC qui passe par le sommet C, comme $AB=m$ (418), on a........ $c=-m^2\log m$, d'où $t=m^2\log\dfrac{x}{m}$. On voit donc que si $m=1$, on a $t=\log x$, *chaque aire, prise à partir de* BC, *est donc le logarithme de l'abscisse*.

Mais si l'angle des asymptotes est α, l'aire est (682), $t=\int y\,dx\sin\alpha=\int\dfrac{\sin\alpha\,dx}{x}$, en faisant $m=1$; donc

$t = \text{Log}\, x$, en prenant pour systême de logarithmes celui dont le module est $M = \sin\alpha$. Si l'angle α est droit, $M = 1$, on retombe sur le 1er. cas, et on obtient les logarithmes népériens; mais on voit qu'en faisant varier l'angle α des asymptotes, on peut obtenir tous les systêmes possibles. Ainsi, lorsque la base est 10, on a $M = 0,4342945$........L'angle qui a ce nombre pour sinus, le rayon étant un, est $\alpha = 28°, 601$...... tel est l'angle que doivent former les asymptotes d'une hyperbole, la puissance étant un, pour que chaque aire soit le logarithme tabulaire de son abscisse. On voit par là que c'est très-improprement qu'on avoit donné la dénomination de *Logarithmes hyperboliques* à ceux de Néper.

III. Pour le cercle $y^2 = a^2 - x^2$, l'origine étant au centre C, on a

$$t = \int\sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx = \int\frac{a^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

en multipliant et divisant par $\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Or, ce dernier terme est facile à intégrer par parties, puisque... $\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ est la différentielle de $-\sqrt{(a^2-x^2)}$. On a donc

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = -x\sqrt{(a^2-x^2)} + \int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = -xy + t.$$

Substituons et transposons t, nous aurons

$$t = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

mais la formule $ds^2 = dx^2 + dy^2$ appliquée à notre cercle, donne $ds = \frac{adx}{y} = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$; donc en prenant l'arc s

dans les mêmes limites que l'intégrale proposée, on a enfin $t = \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} as + c$. Soient $CA = b$, $AB = k$: doublons et intégrons depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, pour obtenir l'aire du segment BOB', nous aurons (742) $a \times$ arc $BOB' - bk$; puis ajoutant le triangle CBB', il vient le secteur $CBOB' = \frac{1}{2} CO \times$ arc BOB', ce qui s'accorde avec les principes connus.

IV. Pour l'ellipse $y = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$, d'où 53.

$$t = \int \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{b}{a} \times z,$$

z désignant la partie de l'aire du cercle circonscrit qui est comprise entre les ordonnées limites. Les aires t et z sont donc dans le rapport constant de b à a. Ainsi *l'aire du cercle est à celle de l'ellipse, ou l'aire d'un segment de cercle est à celle du segment de l'ellipse inscrite qui est terminé par la même ordonnée, comme le grand axe est au petit;* et, puisque l'aire du cercle circonscrit est πa^2, celle de l'ellipse entière est πab.

V. Pour la cycloïde FMA, mettons l'origine en F, 23.
et soit $FS = x$, $SM = y$; nous aurons (678, VI),

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{2r - y}\right)}, \quad t = \int y\, dx = \int \sqrt{(2ry - y^2)}\, dy;$$

cette intégrale est l'aire de la portion FKN du cercle générateur ; donc l'aire $FyAM = FKEF = \frac{1}{2} \pi r^2$. Comme d'ailleurs $AE = \pi r$, le rectangle $yE = 2\pi r^2$, d'où . . . . $AFE = \frac{3}{2} \pi r^2$ et l'aire *AFA' de la cycloïde entière est triple de celle du cercle générateur.*

749. Nous ferons ici quelques remarques.

1°. Si l'aire t est comprise entre les branches $BM\ DK$ 55.
d'une même courbe ou entre deux courbes différentes

53. données, en nommant $Y = Fx$, $y = fx$, les ordonnées PM PE, on a $BCPM = \int Y dx$, $DCPE = \int y dx$, d'où $BDEM = \int (Y - y) dx$.

2°. Quoique là méthode infinitésimale n'ait pas le caractère de l'évidence, cependant comme on peut toujours la remplacer par une analyse rigoureuse, dont elle n'est, pour ainsi dire, que l'abrégé, on ne doit pas faire difficulté de l'employer. C'est même ce que nous ferons dorénavant, autant par la facilité qu'elle offre pour l'introduction des limites dans le calcul, que parce qu'elle est usitée dans les traités les plus célèbres, tels que les Mécaniques céleste et analytique, etc... et qu'il convient d'y être très-exercé.

55. L'aire t peut être considérée comme la somme (746) de rectangles tels que m, dont dx et dy sont les côtés; $dxdy$ sera donc l'élément de l'aire t, et il s'agit d'intégrer entre les limites convenables. Par exemple, pour $BDEM$, opérons relativement à y, et prenons $\int y dx$ depuis E jusqu'en M; les ordonnées PE PM étant y et Y, ... $(Y - y) dx$ est donc l'élément EM, infiniment petit dans une dimension: et il s'agira d'intégrer $(Y - y) dx$ depuis BD jusqu'à EM. On retombe ainsi sur la formule précédente.

54. Pareillement, concevons que dans le cercle C on ait pris un élément m en un lieu quelconque; sa distance au centre ou $Cm = r$ et l'angle $mCx = \theta$ en fixent la position. L'aire de l'élément peut être représentée par $dr\,d\theta$, dont l'intégrale relative à θ est θdr: en la prenant depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi r$, on a l'aire d'une couronne circulaire $= 2\pi r dr$, dont l'épaisseur dr est infiniment petite. L'intégrale est πr^2; prise depuis le centre C où $r = 0$, jusqu'à la circonférence B où $r = R =$ le rayon du cercle, on a πR^2 pour l'aire du cercle.

L'application de cette méthode à la recherche des centres de gravité et des momens d'inertie est sur-tout remarquable. Voyez ma Mécanique, n°s. 64 et 242.

3°. Si l'aire est renfermée entre quatre branches de courbe, telles que *BM BI IK KM*, il sera facile de la partager par des droites parallèles aux axes, en parties qu'on sache évaluer séparément d'après les principes précédens. Et si l'aire est comprise dans le contour d'une courbe fermée, il faut intégrer $(Y-y)dx$ depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur de x. 55.

4°. L'ordonnée y de la courbe ne doit pas devenir infinie entre les limites de l'aire (661, 745).

5°. L'élément ydx change de signe avec y ou x, d'où il suit que l'aire devient négative lorsque x ou y sont de signes contraires.

6°. Si la courbe coupe l'axe des x entre les limites de l'aire, il faut chercher chacune des deux parties et ajouter, parce que l'une est positive et l'autre négative, et que la somme demandée doit être obtenue sans avoir égard à ce dernier signe.

Par exemple, la courbe *KACD* a pour équation . . 56.
$y = x - x^3$, $AK = AI = 1$, l'origine est en A. L'aire $t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + c$: si elle doit commencer au point B pour lequel $AB = \sqrt{\frac{1}{3}}$, on trouve $c = -\frac{5}{36}$; d'où . . $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{36}$: et si l'aire doit être terminée en E, $AE = \sqrt{\frac{2}{3}}$, on trouve $z = 0$, ce qui indique seulement que les aires *BCI IED* sont égales et de signes contraires. En effet, on voit aisément que . . . . . . $BCI = \frac{1}{8} = - DIE$. De même, l'aire prise depuis K jusqu'en I est nulle, parce que $ACI = \frac{1}{4} = - KOA$.

750. Pour donner une application de la formule (682), 53.
$t' = \frac{1}{2}(xy' - y)$, qui sert à trouver l'aire t comprise entre deux rayons vecteurs, cherchons l'aire *CMO* dans

l'ellipse DO ; on a $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$,
d'où

$$\tau'=-\frac{1}{2}\left(\frac{b^2x^2}{a^2y}-y\right)=-\frac{b^2}{2y};\ d\tau=-\frac{b^2dx}{2y}$$

le signe — provient de ce que x décroît quand τ croît (661) : on peut omettre ce signe et on a $\tau=\frac{1}{2}b\int\frac{bdx}{y}$. Mais la formule (681) des rectifications appliquée au cercle dont le rayon est b, donne pour longueur de son arc $s=\int\frac{bdx}{y}$. En le prenant entre les mêmes limites $x=CO$ et $x=CA$, on a $\tau=\frac{1}{2}bs$ ou $MCO=\frac{1}{2}b\times$ arc BO.

52. Pour l'hyperbole MN on a $xy=m^2$ d'où $\tau'=-y$ et $d\tau=ydx$, $\tau=\int ydx$: donc le secteur quelconque hyperbolique $CAM=CBPM$.

25. 751. Lorsque les coordonnées sont polaires, on a (682), $d\tau=\frac{1}{2}r^2d\theta$. Ainsi dans la spirale d'Archimède (472), où $2\pi r=a\theta$, on trouve . . . .
$\tau=\frac{\pi}{a}\int r^2dr=\frac{\pi}{a}\cdot\frac{r^3}{3}+c$. Pour l'aire AOI formée par une révolution entière du rayon vecteur AM, il faut prendre l'intégrale depuis $r=0$ jusqu'à $r=a$. On obtient $AOI=\frac{1}{3}\pi a^2=$ le tiers du cercle dont le rayon est a ou AI.

Remarquons que pour pouvoir étendre l'intégrale au-delà de $\theta=400°$, il faut avoir égard à ce que l'aire contient celle qu'on vient d'obtenir, comme n°. 749, 6°.

752. Donnons quelques exemples de la formule (681) des rectifications ; $s=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$

51. I. Pour la parabole $y^2=2px$ donne $ydy=pdx$, $s=\int\frac{dy}{p}\sqrt{(y^2+p^2)}$. Cette intégrale est (717, 1°.)

$$s = c + \frac{y}{2p}\sqrt{(p^2+y^2)} + \tfrac{1}{2}p\log\{y+\sqrt{(p^2+y^2)}\}$$ 51.

Si l'arc s commence en A, $y=0$ donne $s=0$: on en tire $c=-\frac{1}{2}p\log p$; donc

$$AM = \frac{y\sqrt{(p^2+y^2)}}{2p} + \tfrac{1}{2}p\log\left\{\frac{y+\sqrt{(p^2+y^2)}}{p}\right\}$$

II. pour la seconde parabole cubique $y^3 = ax^2$, on a $s = \int dy \sqrt{\left(1+\frac{9y}{4a}\right)}$: on trouve donc (720)

$$s = \tfrac{8}{27}a\sqrt{\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^3} + c$$

En général $y = ax^n$ représente toutes les paraboles ou les hyperboles, suivant que n est une fraction positive ou négative : on obtient $s = \int dx \sqrt{(1+n^2a^2x^{2n-2})}$. Toutes les fois (720) que $2(n-1)$ sera exactement contenu dans 1, on aura l'arc s sous forme finie.

III. Pour le cercle, suivant que l'origine est au centre ou à l'extrémité du diamètre, on a $y^2 = r^2 - x^2$ ou $y^2 = 2rx - x^2$. Dans ces deux cas il vient $s = \int \frac{rdx}{y}$.
En mettant pour y sa valeur en x, on voit que l'intégration ne peut s'effectuer que par séries (743), ou par des arcs de cercle, ce qui ramène la question au point d'où on est parti.

IV. Pour l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, donne

$$s = \int \frac{dx}{a}\sqrt{\left(\frac{a^4 - x^2(a^2-b^2)}{a^2-x^2}\right)} = \int dx \frac{\sqrt{(a^2-e^2x^2)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

en faisant $ae = \sqrt{(a^2-b^2)}$; e désigne le rapport de l'excentricité au demi grand axe. On ne peut intégrer cette expression que par une série ; mais il faudra

disposer le calcul de manière à la rendre convergente.
53. Ainsi on pourra développer (485, II), $\sqrt{(a^2 - e^2x^2)}$.

Ou bien on fera l'arc OB du cercle circonscrit $= \theta$, d'où $CA = x = a \cos \theta$, et $\dfrac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -d\theta$, puis $s = -a \int d\theta \sqrt{(1 - e^2 \cos^2\theta)}$. On aura à intégrer une suite de termes de la forme $A \cos^{2m}\theta . d\theta$ (734); par là l'arc OM dépendra, à l'aide d'une série, de l'arc correspondant OB du cercle circonscrit.

La rectification de l'hyperbole offre un calcul semblable.

23. V. Dans la cycloïde, l'origine étant en F, on a (678, VI) $y' = \sqrt{\dfrac{y}{2r - y}}$; donc (712, IV)

$$s = \int \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{y}} dy = 2\sqrt{(2ry)}.$$

On n'ajoute pas de constante, parce que l'arc s commence en F. Or $\sqrt{(2ry)} = KF$, donc $FM = 2$ fois la corde KF.

753. Si les coordonnées sont polaires (683), on a $ds = \sqrt{(r^2d\theta^2 + dr^2)}$. Ainsi la spirale d'Archimède, où $2\pi r = a\theta$, donne $s = \int \dfrac{2\pi dr}{a} \sqrt{\left(\dfrac{a^2}{4\pi} + r^2\right)}$. En comparant cette expression à celle de l'arc de parabole, on voit que les longueurs des arcs de ces courbes sont égales, lorsque r est l'ordonnée de la parabole et $\dfrac{a}{\pi}$ le paramètre.

Dans la spirale logarithmique (474), $\theta = \log r$; on trouve $s = \int dr \sqrt{2} = r\sqrt{2} + c$, si l'arc commence au pôle, $c = 0$, et on a $s = r\sqrt{2}$. Ainsi malgré que la courbe n'atteigne son pôle qu'après un nombre infini de révolutions, l'arc s est fini et égal à la diagonale du carré construit sur le rayon vecteur qui le termine.

Voyez pour les courbes à double courbure, ce qu'on a dit n°. 696.

10. *Des Aires et des Volumes des Corps.*

754. Le volume v et l'aire u d'un corps de révolution sur l'axe des x, s'obtiennent (698) en intégrant

$$v = \int \pi y^2 dx,\ u = \int 2\pi y ds = \int 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

Voici quelques applications de ces formules.

I. Pour l'ellipse, en recourant à la valeur de ds, n°. 752, IV, on trouve

$$v = \frac{\pi b^2}{a^2}\int (a^2 - x^2)dx,\ u = \frac{2\pi be}{a}\int \sqrt{\left\{\frac{a^2}{e^2} - x^2\right\}} dx$$

la 1re. donne $v = \pi b^2\left(x - \frac{x^3}{3a^2} + c\right)$: si le sommet est une des limites, $c = -\frac{2}{3}a$. Soit donc z la hauteur du segment d'ellipsoïde, ou $x = a - z$, le volume..... $= \frac{\pi b^2 z^2}{3a^2}(3a - z)$. Pour l'ellipsoïde entier $z = 2a$, et on a $\frac{4}{3}\pi b^2 a$. Il en résulte que 1°. le volume de la sphère $= \frac{4}{3}\pi a^3$; 2°. ces deux corps sont entre eux :: $b^2 : a^2$; 3°. chacun d'eux est les $\frac{2}{3}$ du cylindre qui lui est circonscrit ; 4°. enfin le segment sphérique $= \pi z^2 (a - \frac{1}{3}z)$

L'intégrale qui entre dans la valeur de u, est visiblement l'aire d'une portion de cercle concentrique à l'ellipse, comprise entre les mêmes limites que l'arc générateur, et dont le rayon est $\frac{a}{e}$. Soit z cette aire, facile à obtenir, on aura $u = \frac{2\pi bez}{a}$.

S'il s'agit de la sphère, on a (752, III), $ds = \frac{rdx}{y}$,

d'où $u = \int 2\pi r dx$. On trouve aisément $2\pi rz$ pour la surface de la calotte ou de la zône dont z est la hauteur ; et $4\pi r^2$ pour l'aire de la sphère entière.

II. Pour la parabole $y^2 = 2px$; on trouve

$$v = \int 2\pi px dx, \quad u = \int \frac{2\pi}{p} \cdot y dy \sqrt{(y^2 + p^2)}$$

$$\text{d'où} \quad v = \pi px^2 + c, \quad u = \frac{2\pi}{3p}\{\sqrt{(y^2+p^2)^3} + C\}$$

si l'origine est au sommet $c = 0$ et $C = -p^3$. On a donc ainsi le volume et l'aire d'un segment de paraboloïde de révolution.

III. Soit $y^m = ax^n$, on en tire

$$v = \int \pi \sqrt[m]{a^2} \cdot \sqrt[m]{x^{2n}} dx = \frac{m\pi x}{m+2n} \sqrt[m]{(ax^n)^2} = \frac{m\pi xy^2}{m+2n}$$

ce calcul se rapporte aux paraboles et aux hyperboles suivant que n est positif ou négatif.

755. Le volume V et l'aire U d'un corps sont donnés par les formules (701)

$$V = \iint z dx dy \qquad U = \iint dx dy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$$

voici comment on doit entendre ces doubles intégrales. Après avoir mis pour z, p et q leurs valeurs en x et y, on intégrera, en regardant comme constant x ou y à volonté, suivant que l'une offrira des calculs plus simples que l'autre. On aura ensuite égard aux limites que la question détermine. Par exemple si l'aire U est comprise entre deux plans parallèles aux xz, et qu'on ait intégré par rapport à y, les équations de ces plans étant $x = a$ et $x = b$, on prendra l'intégrale entre ces limites ; le résultat sera délivré de y ; mais il contiendra x, qui, dans z, p et q, a été regardé comme constant. On inté-

grera de nouveau relativement à x, depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur de cette variable, et on aura l'aire demandée.

La première intégrale représente l'aire *CMD* d'une tranche *EMQRD* infiniment mince comprise entre deux plans parallèles aux xz, et terminée en *C* et *D* aux limites convenables. La seconde intégrale est l'aire de la somme d'une série infinie de tranches semblables. 49.

Si le corps est terminé latéralement par des surfaces courbes, on devra introduire pour limites de x des fonctions de y, en opérant d'une manière analogue au n°. 749. Des exemples éclairciront tout ceci.

Pour la sphère $x^2+y^2+z^2=r^2$, d'où

$$p=-\frac{x}{z},\quad q=-\frac{y}{z},\quad \sqrt{(1+p^2+q^2)}=\frac{r}{z}$$

$$U=\iint\frac{rdxdy}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}},$$

on fera d'abord x constant, et $r^2-x^2=A^2$; puis intégrant $\frac{dy}{\sqrt{(A^2-y^2)}}$, on a arc $\left(\sin=\frac{y}{A}\right)$. Or, le plan 57.
xy coupe la sphère suivant un cercle Cy dont l'équation est $x^2+y^2=r^2$, et dans lequel l'abscisse..........
$AE=\pm\sqrt{(r^2-x^2)}=\pm A$, est le rayon du cercle formé par le plan coupant *DmC*. Si donc on prend cette intégrale depuis $x=-A$, jusqu'à $x=+A$, on aura l'aire infiniment étroite *DmC* d'une bande parallèle aux xz, et tracée sur l'hémisphère supérieur.

Faisant donc $x=-A$ et $x=+A$ dans arc.....
$\left(\sin=\frac{y}{A}\right)$, puis retranchant le 1er. résultat du 2e. nous aurons π, parce que l'arc dont le sinus $=1$, est $\frac{1}{2}\pi$. Multiplions par la quantité rdx, qu'on a prise pour constante, nous aurons πrx pour intégrale; et les limites étant $-r$ et

CHAPITRE II.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS ENTRE DEUX VARIABLES.

1. *Séparation des Variables; Équations Homogènes.*

757. OCCUPONS-NOUS de la *Méthode inverse des Tangentes*, c.-à-d., intégrons les équations du 1er. ordre entre deux variables. Cette dénomination provient de ce que, pour trouver la courbe qui a pour sous-tangente, tangente, ou etc., une fonction donnée de x et y, $f(x,y)$, il faut intégrer les équations (678)........... $y=y'f(x,y)$.... $y\sqrt{(1+y'^2)}=y'f(x,y)$, ...

Soit proposée l'équation différentielle

$$Mdy+Ndx=0$$

qui est du premier ordre entre les deux variables x et y. Il est clair que si elles ne sont pas mêlées, en sorte que M ne contienne pas x, et que N soit sans y, l'intégrale de l'équation sera la somme des intégrales de chaque terme qu'on trouvera par les principes antérieurs, ou $\int Mdy+\int Ndx=$ const.

Il en sera de même de toute équation dont on pourra *Séparer* les variables. Le cas le plus simple est celui où M est fonction de x, et N de y seulement; car, divisant l'équation par MN, on a $\frac{dy}{N}+\frac{dx}{M}=0$. C'est ainsi que

$$dx\sqrt{(1+y^2)}-xdy=0$$

donne $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)}}$, d'où (717, 1°.)

$$\log cx = \log \{y + \sqrt{(1+y^2)}\}, \text{ et } cx = y + \sqrt{(1+y^2)}.$$

758. Si $M = XY$, $N = X_{,}Y_{,}$, X et $X_{,}$ étant des fonctions de x, Y et $Y_{,}$ des fonctions de y ; on a $XYdy + X_{,}Y_{,}dx = 0$, qui donne, en divisant par $XY_{,}$,

$$\frac{Y}{Y_{,}}dy + \frac{X_{,}}{X}dx = 0.$$

759. La séparation des variables est encore possible dans les équations *Homogènes* (328) par rapport à x et y. Soit m le degré de chaque terme, en divisant toute l'équation par x^m, un terme quelconque $Ay^k x^h$ deviendra $A\left(\frac{y}{x}\right)^k$, à cause de $m = h + k$ par supposition. On voit donc que M et N deviendront des fonctions de $\frac{y}{x}$, en sorte que si on divise par M l'équation $Mdy + Ndx = 0$, et la fraction $\frac{N}{M}$ haut et bas par x^m, en faisant $y = xz$; cette fraction sera une fonction de z seul. On aura ainsi $dy + Zdx = 0$; mais $y = xz$ donne $dy = xdz + zdx$, donc $xdz + (z + Z)dx = 0$, d'où

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z+Z} = 0 \quad \text{et} \quad \log x + \int \frac{dz}{z+Z} = 0.$$

I. Prenons pour premier exemple.................. $(ax + by)dy + (fx + gy)dx = 0$. Divisons par $ax + by$, nous trouverons

$$dy + \frac{f + gz}{a + bz}dx = 0, \text{ d'où } \frac{dx}{x} + \frac{(a+bz)dz}{bz^2 + (a+g)z + f} = 0,$$

équation facile à intégrer. Il faudra ensuite substituer $\frac{y}{x}$

pour z. C'est ainsi que $ydy+(x+2y)dx=0$, à cause de $a=0$, $b=f=1$, $g=2$, donne............. $\frac{dx}{x}+\frac{zdz}{z^2+2z+1}=0$; on ajoute dz au numérateur du 2e. terme, qui devient $\frac{dz(1+z)}{(1+z)^2}$ ou $\frac{dz}{1+z}$. On a donc à intégrer

$$\frac{dx}{x}+\frac{dz}{1+z}-\frac{dz}{(1+z)^2}=0,$$

d'où $$\log cx+\log(1+z)+\frac{1}{1+z}=0,$$

ou $\log c(x+xz)=\frac{-1}{1+z}$, $\log c(x+y)+\frac{x}{x+y}=0$, en remettant y pour xz.

II. Pour $ay^m dy+(x^m+by^m)dx=0$,

on a $$dy+\frac{1+bz^m}{az^m}dx=0;$$

d'où $$\frac{dx}{x}+\frac{az^m dz}{az^{m+1}+bz^m+1}=0.$$

III. Soit $xdy-ydx=dx\sqrt{(x^2+y^2)}$, on divisera par x, et on aura $dy-\frac{y}{x}dx=dx\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}$. Et faisant $y=xz$,

$$dy-zdx=dx\sqrt{(1+z^2)},\ \text{d'où}\ \frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)}},$$

dont l'intégrale (717) est $x=cz+c\sqrt{(1+z^2)}$, ou $x^2=cy+c\sqrt{(x^2+y^2)}$, qu'on réduit à $x^2=2cy+c^2$, en transposant cy et élevant au carré.

51. IV. Quelle est la courbe dont l'aire $BCMP$ est égale au cube de l'ordonnée PM qui la termine, divisé par

l'abscisse, et cela pour chacun de ses points, et à partir 51.
d'une ordonnée fixe BC. De $\int y\mathrm{d}x = \frac{y^3}{x}$, on tire en différentiant, $(x^2y + y^3)\,\mathrm{d}x = 3xy^2\mathrm{d}y$; en faisant $y = zx$, on trouve $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{3z\mathrm{d}z}{1-2z^2}$, d'où $x\,(x - 2xz^2)^3 = c$, puis enfin $(x^2 - 2y^2)^3 = cx^2$.

760. Toute équation qu'on pourra rendre homogène sera donc intégrable. Ainsi pour

$$(ax + by + c)\,\mathrm{d}y + (mx + ny + p)\,\mathrm{d}x = 0,$$

on fait $\quad ax + by + c = z, \quad mx + ny + p = t,$

d'où $\quad a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y = \mathrm{d}z, \quad m\mathrm{d}x + n\mathrm{d}y = \mathrm{d}t;$

puis $\quad \mathrm{d}y = \frac{m\mathrm{d}z - a\mathrm{d}t}{mb - na}, \quad \mathrm{d}x = \frac{b\mathrm{d}t - n\mathrm{d}z}{mb - na}:$

la proposée devient $z\mathrm{d}y + t\mathrm{d}x = 0$, ou. ....
$(mz - nt)\,\mathrm{d}z + (bt - az)\,\mathrm{d}t = 0$, équation homogène.

Si $mb - na = 0$, ce calcul cesse d'être possible, mais alors $m = \frac{na}{b}$, et la proposée est

$$bc\mathrm{d}y + bp\mathrm{d}x + (ax + by)\,(b\mathrm{d}y + n\mathrm{d}x) = 0,$$

dont on sépare les variables en faisant $ax + by = z$; on substitue cette valeur et $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z - a\mathrm{d}x}{b}$.

761. Prenons enfin l'équation

$$\mathrm{d}y + Py\mathrm{d}x = Q\mathrm{d}x,$$

où P et Q sont des fonctions de x seule : on nomme cette équation *Linéaire*, ou *du* 1er. *degré et du* 1er. *ordre*. On fera

$$y = zt, \text{ d'où } z\mathrm{d}t + t\mathrm{d}z + Pzt\mathrm{d}x = Q\mathrm{d}x;$$

et, comme on peut disposer à volonté de l'une des indéterminées z et t, on égalera à zéro le coefficient de z, ce qui donne

$$dt + Ptdx = 0, \quad tdz = Qdx;$$

la 1re. donne $\frac{dt}{t} = -Pdx$, d'où $\log t = -\int Pdx$, et comme Pdx ne contient pas y, l'intégrale u de Pdx est facile à trouver. On a donc

$$\log t = -u + a, \text{ ou } t = e^{-u+a} = e^a e^{-u} = Ae^{-u},$$

en faisant la constante $e^a = A$. On substitue cette valeur dans $tdz = Qdx$, et on a $Adz = Qe^u dx$, d'où

$$Az = \int Qe^u dx + c,$$

Q et u sont des fonctions connues de x, et l'intégrale $\int Qe^u dx$ étant obtenue, on remettra pour Az sa valeur $\frac{Ay}{t}$ ou ye^u, ce qui donnera enfin

$$ye^u = \int Qe^u dx + c, \quad \text{où } u = \int Pdx.$$

Il suit de ce calcul, qu'il est inutile d'ajouter une constante a à l'intégrale $\int Pdx = u$.

Soit, par exemple, $dy + ydx = ax^3dx$; on a $P = 1$, $Q = ax^3$, $u = \int Pdx = x$,

$$\int Qe^u dx = \int ax^3 e^x dx = ae^x (x^3 - 3x^2 + 6x + 6);$$

donc $$y = ce^{-x} + a(x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$$

2. *Du Facteur propre à rendre intégrable.*

762. L'équation $Mdy + Ndx = 0$ ne résulte pas toujours immédiatement de la différentiation d'une équation $f(x, y) = 0$; car on a pu, après ce calcul, mul-

tiplier ou diviser toute l'équation par une fonction quelconque, ou en éliminer une constante (642) à l'aide de $f(x, y) = 0$, ou enfin combiner ces équations entre elles d'une manière quelconque. L'équation proposée peut donc ne pas être une *différentielle exacte*.

En général, soit $u = f(x, y)$, la différentielle étant $du = Mdy + Ndx$, la relation $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}$ devient ici

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy} \quad \ldots. (1)$$

Ainsi, *toutes les fois que* Mdy + Ndx *est une différentielle exacte, la condition* (1) *doit être remplie. Réciproquement si* M *et* N *satisfont à la condition* (1), Mdy + Ndx *est une différentielle exacte qu'il sera toujours possible d'intégrer.*

Pour démontrer cette réciproque, intégrons Mdy en regardant x constant, et soit $P + X$ l'intégrale ; X représente ici une fonction quelconque de x; P est une fonction connue de x et y résultant de $\int Mdy$ relative à y seul, ou $M = \frac{dP}{dy}$. La différentielle complète de $P + X$ est $\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy + dX$, ou $\frac{dP}{dx}dx + Mdy + dX$; d'où on doit conclure que $P + X$ sera l'intégrale de. .... $Mdy + Ndy$ (qui sera par conséquent une différentielle exacte), si on peut déterminer X de sorte que

$$Ndx = \frac{dP}{dx}dx + dX \text{ ou } dX = \left(N - \frac{dP}{dx}\right)dx \ldots (2)$$

Or, en différentiant $M = \frac{dP}{dy}$ par rapport à x, on trouve en vertu de la condition (1)

$$\frac{dM}{dx}=\frac{d^2P}{dydx}=\frac{dN}{dy} \quad \text{ou} \quad \frac{dN}{dy}-\frac{d^2P}{dydx}=0,$$

ou enfin la différentielle relative à y de $N-\frac{dP}{dx}$ est nulle ; ainsi $N-\frac{dP}{dx}$ est constant, c.-à-d., est fonction de x seul, ce qu'il s'agissoit de démontrer. L'intégrale cherchée est donc $P+X$, P étant celle de Mdy par rapport à y seul, et X l'intégrale de la fonction de x désignée par $N-\frac{dP}{dx}$.

Il est inutile de dire qu'on peut également commencer par intégrer Ndx, y étant constant, et opérer d'une manière analogue. On préférera celle de ces deux voies qui facilitera davantage le calcul.

I. Soit $\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}+adx+2bydy$,

où $\quad M=2by, \quad N=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}+a,$

on trouve $P=by^2$; ainsi by^2+X est l'intégrale cherchée, puisque la condition (1) est remplie. La différentielle de by^2+X relative à x, comparée à Ndx, donne

$$dX=\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}+adx, \text{ d'où } X=ax+\log c\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}$$

donc $\quad by^2+ax+\log c\,\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}$

est l'intégrale demandée.

II. De même pour

$$\frac{a\,(xdx+ydy)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}+3by^2dy,$$

on a $$M = \frac{ay}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{x}{x^2+y^2} + 3by^2$$

$$N = \frac{ax}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Après avoir reconnu que l'équation (1) est satisfaite, on intégrera Ndx par rapport à x : on trouvera..... $a\sqrt{(x^2+y^2)} + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y$, en désignant par Y une fonction de y. Différentiant cette expression par rapport à y, et comparant à Mdy, on aura $dY = 3by^2dy$, d'où $Y = by^3 + c$. Ainsi l'intégrale est obtenue complètement. En faisant $a = b = 0$, on trouve

$$\int \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + c.$$

Cette intégrale, employée par Laplace (*Mécan. cél.*, I, p. 6), est un cas particulier de la précédente. *Voy.* n°. 664.

III. On trouvera de même

$$\int \frac{dx\{x + \sqrt{(x^2+y^2)}\} + ydy}{\{x + \sqrt{(x^2+y^2)}\}\sqrt{(x^2+y^2)}} = \log c\{x + \sqrt{(x^2+y^2)}\}.$$

763. Mais si $Mdy + Ndx$ ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, on peut se proposer de trouver si, en multipliant cette expression par une fonction z de x et y, elle pourroit devenir une différentielle exacte. $Mdy + Ndx = 0$ résulte de l'élimination d'une constante entre la primitive $f(x, y, c) = 0$ et sa différentielle immédiate. Mettons ces équations sous la forme......... $y' + K = 0$, $c = \varphi(x, y)$, ce qui est permis ; K représente une fonction quelconque de x et y. La dérivée de $c = \varphi(x, y)$, étant $\varphi' = Py' + Q = 0$, on a $y' + \frac{Q}{P} = 0$;

et, comme la constante c n'entre plus ici, cette expression (642) est identique avec $y'+K$, ou

$$y'+K=\frac{Py'+Q}{P}=\frac{\varphi'}{P}, \text{ on a } \varphi'=P(y'+K);$$

comme ces deux membres sont identiques, et que φ' est une dérivée exacte, $P(y'+K)$ doit également en être une, ce qui prouve *qu'il y a toujours un facteur* P *propre à rendre intégrable la fonction* y' + K, *ainsi que toute équation différentielle du* 1er. *ordre entre* x *et* y.

Cherchons ce facteur. $Mzdy+Nzdx$ ne peut être différentielle exacte qu'autant que $\frac{d(Mz)}{dx}=\frac{d(Nz)}{dy}$, ou

$$z\left\{\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right\}=N.\frac{dz}{dy}-M.\frac{dz}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Cette équation, aux différentielles partielles, est rarement utile à cause de la difficulté des calculs; mais on peut en tirer quelques propriétés remarquables.

1°. Si l'intégrale u de $z(Mdy+Ndx)$ étoit connue, le facteur z seroit facile à trouver; car en comparant $\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$ avec $z(Mdy+Ndx)$, qui lui est identique, on en tire aisément z.

2°. Multipliant l'équation $du=z(Mdy+Ndx)$ par une fonction quelconque de u, telle que φu, nous avons $\varphi u.du=z\varphi u(Mdy+Ndx)$. Or, le 1er. membre étant une différentielle exacte, le 2e. qui lui est identique doit jouir de la même propriété; d'où il suit qu'il y a une infinité de facteurs propres à rendre intégrable toute fonction de x et de y, et que la connoissance de l'un d'entre eux suffit pour en obtenir un nombre indéfini d'autres.

3°. Si le facteur z ne contient que l'une des variables

x ou y, on le trouve aisément; car soit z fonction de x seul, l'équation (3) se réduit à

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{M}\left(\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dx}\right) \quad \ldots\ldots (4)$$

parce que $\frac{dz}{dy}=0$, et que $\frac{dz}{dx}$ n'est plus une différence partielle. L'intégration de cette équation donnera z; car l'hypothèse exige que le 2e. membre soit indépendant de y; on reconnoîtra même à ce caractère si elle est légitime. De même, si z est fonction de y seul, on a

$$\frac{dz}{z}=\frac{dy}{N}\left(\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right) \quad \ldots\ldots (5)$$

et le 2e. membre doit être indépendant de x. On remarque dans les équations 4 et 5 que la partie renfermée dans les parenthèses est nulle, lorsque $Mdy+Ndx$ est une différentielle exacte.

Voyez n°s. 766, 5°., et 770.

I. Soit par exemple $dx+(adx+2bydy)\sqrt{(1+x^2)}=0$ la condition d'intégrabilité n'est pas remplie, puisque $\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dx}=-\frac{2byx}{\sqrt{(1+x^2)}}$: mais cette quantité divisée par M ou $2by\sqrt{(1+x^2)}$, donne pour quotient une fonction de x, qui est $\frac{-x}{1+x^2}$; donc l'équation sera rendue intégrable par un facteur fonction de x. L'équation (4) donne

$$\log z=\int\frac{-xdx}{1+x^2}=-\tfrac{1}{2}\log(1+x^2)=-\log\sqrt{(1+x^2)},$$

donc $z=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$. La proposée prend alors la forme qu'on a traitée n°. 762, I.

II. De même, l'équation linéaire

$$dy + Pydx = Qdx$$

donne $\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx} = P$, ainsi la condition (1) n'a pas lieu; mais cette fonction P, divisée par $M = 1$, donne une fonction de x; ainsi $\frac{dz}{z} = Pdx$, d'où............ $\log z = \int Pdx = u$ et $z = e^u$. Tel est le facteur qui rend la proposée intégrable. Elle devient................ $e^u dy + e^u(Py - Q)\,dx = 0$: il ne s'agit plus que de suivre le procédé du n°. 762. Intégrant $e^u dy$ par rapport à y, on a $e^u y + X$ dont la différentielle relative à x, comparée à $e^u(Py - Q)\,dx$, donne $dX = -e^u Qdx$; donc l'intégrale cherchée est, comme on le sait déjà (761),

$$e^u y = \int Qe^u dx + c, \text{ où } u = \int Pdx.$$

III. De même $x^3dy + \left(4x^2y - \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\right)dx = 0$, donne $\log z = \int \frac{dx}{x} = \log x$: ainsi il faut multiplier la proposée par x pour qu'elle soit intégrable. On trouve enfin $x^4y + \sqrt{(1-x^2)} = c$ pour intégrale.

IV. Le facteur propre à rendre intégrable les fonctions homogènes se trouve aisément. Soit m le degré (328) d'une telle fonction F des variables x, y...... si on les remplace par lx, ly,... l étant un nombre quelconque, F deviendra l^mF : ainsi $l = 1 + h$ change F en....... $(1+h)^mF = F\left(1 + mh + m.\frac{m-1}{2}h^2......\right)$. D'un autre côté, x, y,..... sont devenus $x + hx$, $y + hy$,..... et la fonction F de $(x + hx)$, $(y + hy)$.... se développe suivant le théorème (663),

$$F+\frac{dF}{dx}hx+\frac{dF}{dy}hy+\frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2x^2}{2}+\frac{d^2F}{dxdy}h^2xy+\frac{d^2F}{dy^2}\frac{h^2y^2}{2}\cdots$$

Comparant les puissances semblables de h dans ces deux développemens, on trouve

$$mF=\frac{dF}{dx}x+\frac{dF}{dy}y \;\ldots\ldots$$

$$m(m-1)F=\frac{d^2F}{dx^2}x^2+\frac{d^2F}{dxdy}2xy+\frac{d^2F}{dy^2}y^2+\ldots$$

Pour appliquer ce théorême à $Mdy+Ndx$, M et N étant homogènes du degré p, cherchons s'il existe un facteur homogène z qui rend $zMdy+zNdx$ une différentielle exacte; soit n le degré de z. Comme Nz est homogène du degré $p+n$, la propriété ci-dessus donne $(p+n)\;Nz=x\,\frac{d(Nz)}{dx}=y\,\frac{d(Nz)}{dy}$; or on a ...... $\frac{d(Mz)}{dx}=\frac{d(Nz)}{dy}$; et substituant dans la précédente pour ce dernier terme sa valeur, il vient

$$(p+n)\,Nz=x\,\frac{d(Nz)}{dx}+\frac{d(Myz)}{dx}=\frac{d(Nxz+Myz)}{dx}-Nz$$

ou $$(p+n+1)\;Nz=\frac{d(z\,\{My+Nx\})}{dx},$$

équation qui sera satisfaite en faisant $z=\frac{1}{My+Nx}$, car $p=-n-1$. Donc $\frac{Mdy+Ndx}{My+Nx}$ et intégrable : l'intégration ne présente plus ensuite de difficulté (762).

On trouve que $xdy-dx\,\{y+\sqrt{(x^2+y^2)}\}=0$, doit être divisé par $x\sqrt{(x^2+y^2)}$: intégrant ..... $\frac{dy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ par rapport à y, on a $\log\{y+\sqrt{(x^2+y^2)}\}$ (717, 1°.) : ajoutant X, différentiant par rapport à x,

et comparant, il vient

$$dX = -dx\left\{\frac{y+\sqrt{(x^2+y^2)}}{x\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}\{y+\sqrt{(x^2+y^2)}\}}\right\}$$

$$= -2dx\left(\frac{x^2+y^2+y\sqrt{(x^2+y^2)}}{x\sqrt{(x^2+y^2)}\{y+\sqrt{(x^2+y^2)}\}}\right) = -\frac{2dx}{x};$$

ainsi $X = \log c - \log x^2$, et l'intégrale cherchée est $cy + c\sqrt{(x^2+y^2)} = x^2$, comme n°. 759, III.

764. On a quelquefois besoin de différentier relativement à y, des fonctions qui, telles que $u = \int M dx$, sont affectées du signe d'intégration par rapport à x : on différentie alors sous le signe $\int$. En effet, puisqu'on a

$$\frac{du}{dx} = M, \quad \frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy} = \frac{dM}{dy};$$

en intégrant par rapport à x, on trouve $\dfrac{du}{dy} = \int \dfrac{dM}{dy}\, dx$.

3. *Sur les Solutions Singulières ou Particulières.*

765. Soit $Mdy + Ndx = 0$ une équation différentielle qui ait pour intégrale complète $f(x, y, c) = 0$, c étant la constante arbitraire. Soit $Pdy + Qdx = 0$ la différentielle immédiate de cette équation, en sorte que la proposée résulte de l'élimination de c entre ces deux dernières (642). Mais il est clair qu'on parviendroit également à l'équation $Mdy + Ndx = 0$, si différentiant. . . $f(x, y, c) = 0$ relativement à x y et c, on attribuoit à c une valeur telle que la différentielle immédiate de $f = 0$, fût encore $Pdy + Qdx = 0$. Or pour que $Pdy + Qdx + Cdc = 0$ se réduise à $Pdy + Qdx = 0$, il faut que $Cdc = 0$. On a donc, ou $dc = 0$, ou $C = 0$. La 1re. donne $c =$ const. C'est le cas de l'équation primitive $f(x, y, c) = 0$. La 2e. donne $C = 0$, ou $\dfrac{df}{dc} = 0$: les valeurs de c

qui en résultent étant substituées dans $f(x, y, c) = 0$, donneront à cette équation la forme $S = 0$, telle que sa différentielle sera encore $Pdy + Qdx = 0$.

Or, il se présente deux cas : 1°. Si $C = 0$ donne pour c une valeur constante, l'équation $S = 0$ n'est qu'un cas particulier compris dans l'intégrale générale $f(x, y, c) = 0$, c ayant seulement une valeur numérique déterminée : c'est ce qu'on nomme une *Intégrale particulière*. Ce cas n'offre rien de remarquable.

2°. Si $C = 0$ donne pour c une fonction de x et y, l'intégrale $f(x, y, c) = 0$, deviendra par la substitution une nouvelle équation $S = 0$, qui, en général, ne sera pas comprise dans $f(x, y, c) = 0$, puisqu'ici c ne peut y recevoir que des valeurs constantes, tandis qu'il est devenu variable. L'équation $S = 0$, qui ne renferme pas de constante arbitraire, offre donc une relation entre x et y, qui satisfait à la proposée $Mdy + Ndx = 0$, quoique n'étant pas comprise dans son intégrale générale. C'est ce qu'on nomme une *Solution singulière* ou *particulière*.

Par exemple, on a vu (642) que l'élimination de la constante c entre l'équation $y^2 - 2cy + x^2 = c^2$ et sa dérivée, donne

$$(x^2 - 2y^2)y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0\,;$$

mais si on regarde c comme seule variable dans l'équation primitive proposée, on aura $c = -y$, ce qui la changera en $x^2 + 2y^2 = 0$. Il est visible, et on peut aisément s'en assurer par le calcul, que l'équation . . . . $x^2 + 2y^2 = 0$ satisfait à l'équation différentielle, quoiqu'elle ne soit pas comprise dans son intégrale.

Pareillement $x^2 - 2cy - b - c^2 = 0$, a pour dérivée, après l'élimination de c,

$$y'^2(x^2-b)-2xyy'=x^2.$$

La dérivée relative à c seul donne $y+c=0$, d'où $c=-y$, puis $x^2+y^2=b$: c'est la solution singulière de notre équation dérivée.

$$(x^2+y^2-b)(y^2-2cy)+(x^2-b)c^2=0,$$

donne $\quad -y(x^2+y^2-b)+(x^2-b)c=0;$

pour la dérivée de la primitive relative à c ; donc. . .

$c=\dfrac{y(x^2+y^2-b)}{x^2-b}$, et $y^2(y^2+x^2-b)=0$. Mais cette équation n'est pas une solution singulière, parce qu'elle résulte de la proposée en faisant $c=0$; $y^2+x^2=b$ est donc simplement une intégrale particulière, de même pour $y=0$.

766. Nous ferons ici quelques remarques.

1°. Les solutions singulières doivent être cherchées avec autant de soin que les intégrales complètes, parce qu'elles enferment souvent la vraie solution du problême qui conduit à l'équation différentielle qu'on a intégrée.

2°. L'équation $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}c}=0$ exprime la condition pour que $f(x,y,c)=0$ ait des racines égales relatives à c (672). Si donc, à l'aide de l'équation singulière, on chasse x ou y e la proposée, l'équation résultante aura des facteurs égaux. C'est ainsi que dans notre 1er. exemple, si on fait $x^2=-2y^2$, la proposée devient. . . . .
$y^2+2cy+c^2=(y+c)^2=0$.

3°. Puisque la constante c est arbitraire, on peut considérer l'intégrale complète $f(x,y,c)=0$, comme l'équation d'une infinité de courbes dont le paramètre c est différent. Si donc on attribue à c toutes les valeurs possibles, ces lignes consécutives se couperont deux à deux en une série de points, dont le système

forme une courbe tangente à chacune. $f(x, y, c) = 0$ est l'équation de l'une de nos courbes, ainsi que celle de la courbe qui les embrasse toutes; seulement c est constant dans celles-là, quels que soient x et y, tandis que c est dans celle-ci une fonction variable des coordonnées du point de contact. La tangente en ce point étant déterminée par y', et la même pour l'une et l'autre, on voit que y' doit conserver la même valeur, que c soit constant ou variable dans $f(x, y, c) = 0$. D'où il suit que si on élimine c entre $f = 0$ et $\frac{df}{dc} = 0$, l'équation résultante en x et y, qui est *la solution singulière, appartient à la ligne de contact des courbes comprises dans l'intégrale complète.*

4°. Résolvons par rapport à c l'équation $f(x, y, c) = 0$, et soit $c = \varphi(x, y)$. Si on substituoit $\phi(x, y)$ pour c dans $f(x, y, c) = 0$, le résultat seroit identiquement nul, ainsi que toutes les dérivées relatives soit à x, soit à y (631). On a donc (634).

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dc}\frac{dc}{dx} = 0, \text{ d'où } \frac{dc}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dc};$$

or la solution singulière rend $\frac{df}{dc} = 0$, donc $\frac{dc}{dx} = \infty$, on en dira autant de $\frac{dc}{dy}$. Ce caractère offre encore un moyen d'obtenir les solutions singulières, ce qui est surtout utile lorsque, dans l'équation primitive, c n'est qu'à la 1re. puissance; cas qui sembloit échapper à la méthode générale.

De $x^2 - 2cy - c^2 - b = 0$, on tire

$$c = -y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b)}, \quad \frac{dc}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}};$$

donc $x^2 + y^2 = b$, qui rend cette fraction infinie, est la solution singulière.

En posant $\frac{dc}{dx}$ ou $\frac{dc}{dy}$ infini, il conviendra de s'assurer si la relation entre x et y qui en résulte, combinée avec la proposée, ne donne pas $\phi(x, y) =$ const.; car alors on n'auroit qu'une intégrale particulière.

5°. Soit z le multiplicateur qui rend dérivée exacte l'équation $y' + K = 0$, en sorte que $z(y' + K) = \varphi' = 0$ ait pour primitive $\varphi(x, y) = c$: la solution singulière $S = 0$ ne doit pas être comprise dans cette équation. Par conséquent, si de $S = 0$, on tire y en fonction de x, $y = \psi x$, la substitution dans la fonction $\varphi(x, y)$ ne doit pas la réduire à une constante : ainsi sa dérivée φ' ne doit pas être nulle.

On voit donc que des deux expressions $y' + K$, et φ' ou $z(y' + K)$, l'une doit être nulle en vertu de $y = \psi x$, tandis que l'autre ne doit pas l'être : ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que z est infini. Il en résulte que les solutions singulières rendent infinis tous les facteurs propres à rendre intégrable l'équation différentielle proposée : ou plutôt que les solutions singulières de cette équation, ne sont autre chose que les facteurs algébriques que l'on peut mettre en évidence, et séparer entièrement de cette équation par une transformation convenable.

Voyez un mémoire de *Poisson*, 13e. Jour. polyt., p. 71, où il est démontré qu'on peut toujours délivrer une équation du 1er. ordre de sa solution particulière, ou en introduire une à volonté. *Voyez* aussi un mémoire de *Legendre*, Acad. 1790, p. 226.

767. Concevons que $y = X$ satisfasse à une équation

proposée $y' = F(x, y)$, X étant une fonction donnée de x, c.-à-d. qu'on ait

$$X' = F(x, X) \ldots \quad (1);$$

cherchons à reconnoître si $y = X$ *est une solution singulière, ou une intégrale particulière;* X ne renfermant pas de constante arbitraire. Soit $y = \psi(x, a)$ l'intégrale complète de $y' = F(x, y)$; a étant la constante arbitraire : si $y = X$ est un cas particulier de $y = \psi(x, a)$, en sorte que $\psi(x, a)$ devienne X lorsqu'on attribue à a une valeur b, il faut que $\psi(x, a) - X$ soit zéro (491) pour $a = b$: donc

$$\psi(x, a) - X = (a - b)^m z,$$

m étant la plus haute puissance de $a - b$, et z une fonction de x et a qui ne devient 0, ni ∞, pour $a = b$. Représentons la constante $(a - b)^m$ par c; l'intégrale complète de $y' = F(x, y)$ sera donc

$$y = X + cz.$$

Si on substitue cette valeur de y dans $y' = F(x, y)$, cette relation deviendra identique,

$$X' + cz' = F(x, X + cz);$$

or d'une part, le développement de z suivant les puissances ascendantes de c, a la forme (657)

$$z = K + Ac^a + Bc^b + \ldots.$$

les exposans a, b...étant croissans et positifs, et K, A, B... des fonctions de x; car z n'est ni ∞, ni 0, lorsque $c = 0$. Donc

$$X' + cz' = X' + K'c + A'c^{a+1} + \ldots$$

De l'autre part, le développement de $F(x, X + cz)$ doit

pareillement être $F(x, X) + Nc^n z^n + Mc^m z^m + \ldots$; n, $m\ldots$ étant croissans et positifs. Cette série est d'ailleurs facile à obtenir (644, 657), et on doit regarder comme connus les nombres n, $m\ldots$, ainsi que les fonctions de x désignées par N, M,... Si donc on met ici pour z sa valeur développée, on a, en vertu de (1),

$$K'c + A'c^{a+1} + \ldots = Nc^n (K + Ac^a + \ldots)^n + Mc^m (K + Ac^a + \ldots)^m + \text{etc.}$$

Il s'agit donc de savoir s'il est possible de déterminer z, ou plutôt les coefficiens A $B\ldots$ en fonction de x, et les nombres a $b\ldots$, de manière à rendre cette équation identique; car si cela n'est pas possible, $y = X$ est une solution singulière; dans le cas contraire, on a une intégrale particulière. Il se présente trois cas.

1°. Si $n > 1$, le terme $K'c$ n'en rencontre pas de semblable qui puisse le détruire : on fera donc $K' = 0$, d'où $K =$ const. Puis on posera $a + 1 = n$, ... $A' = NK^n$, ce qui déterminera $a = n - 1$, et .. $A = \int K^n N dx$; et ainsi des autres termes. L'identité sera donc toujours possible, et $y = X$ sera une intégrale particulière.

2°. Si $n = 1$, la même chose aura lieu; car, posant $K' = NK$, on aura log $K = \int N dx$: il sera facile ensuite d'ordonner les deux membres, et de comparer les exposans et les coefficiens respectifs des termes de même rang. On déterminera ainsi les exposans a, $b\ldots$ et les coefficiens K, A, $B\ldots$

3°. Enfin, si $n < 1$, le terme $Nc^n K^n$ n'en trouvera aucun autre qui lui soit semblable, puisqu'aucun des exposans de c n'est < 1 dans le 1er. membre : et comme K ne peut être nul, il ne sera possible en aucune

manière de satisfaise à l'identité : $y = X$ sera donc une solution singulière.

768. Puisque $n < 1$ dans ce dernier cas, en mettant $X + cz$ pour y dans $F(x, y)$, si le développement de Taylor est fautif entre le 1er. et le 2e. terme, c.-à-d., si la dérivée de $F(x, y)$ relative à y est infinie (657,3°.), $y = X$ est une solution singulière. Réciproquement une valeur $y = X$ qui satisfait à. . . . $y' = F(x, y)$, et rend $\frac{dF}{dy}$ infini est une solution singulière, puisqu'elle donne au développement de. . . $F(x, X + cz)$ la forme $X' + Nc^n K^n$,.. n étant < 1.

La condition $\frac{dF}{dy}$ ou $\frac{dy'}{dy} = \infty$ forme donc le véritable caractère des solutions singulières, et on voit que pour qu'elle soit remplie, il faut que la fonction F renferme un radical (659,3°.) que l'hypothèse $y = X$ fasse disparoître. Dans le 2e. de nos exemples p. 397, on a

$$y' = \frac{x}{y \pm \sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}, \quad \frac{dy'}{dy} = \frac{\pm y'}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}},$$

et cette dernière fraction est rendue infinie par la solution singulière $y^2 = b - x^2$.

769. *Il est donc facile d'obtenir les solutions singulières sans connoître l'intégrale complète;* car en tirant la valeur de $\frac{dy'}{dy}$, on l'égalera à l'infini : soit $\frac{dy'}{dy} = \frac{U}{T}$, on fera $T = 0$, ou $U = \infty$. Égalant à zéro tous les facteurs de ces équations, les résultats qui satisferont à $y' = F(x, y)$ seront seuls les solutions singulières.

Pour $y' = a(y - n)^k$, on a $ak(y - n)^{k-1} = \infty$, ce qui exige que k soit < 1, et $y = n$, et comme la proposée n'est satisfaite par $y = n$ que quand k est positif, on voit qu'elle n'est susceptible de solution sin-

gulière que quand k est entre 0 et 1. L'intégrale complète est $\frac{(y-n)^{1-k}}{1-k} = ax + c$.

Il n'est pas nécessaire de donner à l'équation dérivée la forme explicite $y' = F(x, y)$ pour appliquer notre théorème ; car soit $V = 0$, la relation donnée entre $x\,y$ et y' ; on peut considérer y' comme une fonction de x et y, que cette équation détermine ; ainsi la différence partielle de y' relative à y, sera donnée par (633)

$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dy} = 0;$$

or pour que $\frac{dy'}{dy}$ soit infini, il faut que $\frac{dV}{dy'}$ soit $= 0$, ou $\frac{dV}{dy} = \infty$: en sorte qu'on obtiendra toutes les solutions singulières par cette voie. Si même la fonction V est rationnelle et entière, ce qu'on peut toujours supposer, il ne sera pas possible que $\frac{dV}{dy}$ soit infini. Il faudra ensuite éliminer y' entre $V = 0$ et $\frac{dV}{dy'} = 0$. On ne devra d'ailleurs prendre que les facteurs de $\frac{dV}{dy'}$, qui ne sont pas communs avec $\frac{dV}{dy}$.

Ce calcul ne fera connoître que celles des solutions singulières qui contiennent y ; mais pour obtenir celles qui ne renferment que x, qui échappent à cette règle, on devra raisonner de même par rapport à x : on trouvera ainsi, outre les solutions déja connues où entrent x et y, celles qui ne dépendent pas de y.

1°. Ainsi $(x^2 - 2y^2)\,y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0$

donne $(x^2 - 2y)y' - 2xy = 0$,

en différentiant par rapport à y' seul : éliminant y' entre ces équations, on trouve $x^2(x^2 + 2y^2) = 0$; or $x = 0$ ne satisfait pas à la proposée, et la solution singulière est $x^2 + 2y^2 = 0$

2°. De même $xdx + ydy = dy\sqrt{(x^2 + y^2 - c^2)}$

ou $$x^2 + 2xyy' + y'^2(c^2 - x^2) = 0$$

donne $$xy + y'(c^2 - x^2) = 0$$

d'où $x^2 + y^2 = c^2$, en éliminant y'.

3°. Pour $ydx - xdy = ads$, où $ds = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$,

on trouve $$y^2 - a^2 = 2xyy' + y'^2(a^2 - x^2)$$

d'où $xy = y'(x^2 - a^2)$; puis éliminant y', on a pour la solution singulière $x^2 + y^2 = a^2$.

4°. Celle de $y = xy' + Y'$, où Y' est une fonction quelconque de y', s'obtient en éliminant y', à l'aide de.....

$$x + \frac{dY'}{dy'} = 0$$

770. Puisque sans connoître l'intégrale complète d'une équation dérivée, on sait en trouver les solutions singulières, et que le facteur z propre à rendre intégrable la proposée est alors infini (766, 4°.); on peut souvent, par des artifices d'analyse, trouver ce facteur z. Un exemple tiré du Mémoire de Trembley (académie de Turin, 1790—91) suffira pour faire entendre ce procédé.

Dans l'exemple 3°. nous avons trouvé $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ pour solution singulière ; la proposée résolue par rapport à y', donne

$$(a^2 - x^2)y' + xy = a\sqrt{(y^2 + x^2 - a^2)}$$

qui est visiblement satisfaite par $x^2 - a^2 = 0$: on essaiera

si le facteur z a la forme $(x^2-a^2)^m\ (y^2+x^2-a^2)^n$ m et n étant des indéterminées. Pour cela on multipliera la proposée par cette fonction, et on posera la condition (1) n°. 762, puis on verra qu'elle est remplie en prenant $m=-1$, $n=-\frac{1}{2}$; ainsi le facteur qui rend la proposée intégrable est $(x^2-a^2)^{-1}\ (y^2+x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$

La théorie des solutions singulières a beaucoup exercé les analystes ; Laplace, Euler, Lagrange, Legendre, Poisson ont tour-à-tour traité cette matière avec la supériorité qui distingue leurs ouvrages : nous invitons à lire leurs Mémoires dans les Collections académiques.

4. *Des Equations où les différentielles passent le premier degré.*

771. Cherchons l'intégrale de.................... $F(x, y, y', y'^2 \ldots y'^m)=0$. Comme cette équation ne peut provenir que de l'élimination d'une constante c entre l'équation intégrale et sa dérivée, dans lesquelles c entre à la puissance m, soit $c=\varphi\ (x, y)$ la valeur de cette constante tirée de l'intégrale; $\varphi'\ (x, y)=0$ ne contiendra y' qu'au 1er. degré, et on pourra en tirer $y'=X$, X contenant x et y affectés de radicaux : et puisqu'en les faisant disparoître par des élévations de puissances, on doit reproduire la proposée $F=0$, il s'ensuit que $y'-X$ doit être le facteur de F.

Si donc on résout la proposée par rapport à y' et qu'on intègre ses facteurs $y'-X=0$, $y'-Y=0$, ... on voit que ces intégrales seront celles de la proposée qui répondent aux diverses valeurs de $c=\varphi\ (x, y)$. Soient $P=0$, $Q=0$, $R=0$,... ces intégrales, leurs produits $PQ=0$, $PQR=0$,... satisferont aussi à la proposée, car la dérivée du produit PQR... étant..............

$P'QR\ldots + PQ'R\ldots + PQR'\ldots +$ etc., chaque terme est nul en particulier.

Par exemple $yy'^2 + 2xy' = y$ donne

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{(y^2 + x^2)}}{y}, \text{ d'où } \frac{yy' + x}{\pm\sqrt{y^2 + x^2}} = 1$$

et comme le 1er. membre est visiblement (712, IV) la dérivée de $\pm\sqrt{(x^2 + y^2)}$, on a pour intégrale

$$\pm\sqrt{(y^2 + x^2)} = x + c, \text{ ou } y^2 = 2cx + c^2.$$

772. Au reste, il est des cas où on peut, par des artifices de calcul, éviter la résolution des équations par rapport à y' : les deux exemples suivans serviront à faire connoître les principaux.

I. Supposons que l'équation ne contienne que x et y', et soit facile à résoudre par rapport à x, en sorte qu'on ait $x = Fy'$. Comme $dy = y'dx$ donne (712, V) . . . . $y = xy' - \int x dy'$; en metttant pour x sa valeur Fy', on a

$$y = y' . Fy' - \int Fy' . dy'$$

après avoir intégré $\int Fy' . dy'$, ce qui rentre dans les quadratures, on éliminera y' à l'aide de la proposée $x = Fy'$.

Ainsi pour $(1 + y'^2)\, x = 1$, on a

$$Fy' = \frac{1}{1 + y'^2},\ y = \frac{y'}{1 + y'^2} - \int \frac{dy'}{1 + y'^2}$$

ce dernier terme $=$ arc (tang $= y'$) $+ c$; éliminant y' on trouve enfin pour l'intégrale demandée

$$y = \sqrt{(x - x^2)} - \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}\right) + c$$

II. Si l'équation a la forme $y = y'x + Fy'$, en différentiant on a $dy = y'dx + \left(x + \frac{dF}{dy'}\right) dy'$: or . . . . . $dy = y'dx$, donc

$$\left(x + \frac{dF}{dy'}\right) dy' = 0.$$

En égalant chaque facteur à zéro, il vient $y' = c$ et $x + \frac{dF}{dy'} = 0$. Il ne reste plus qu'à éliminer y', entre la proposée et l'une ou l'autre de ces équations. Celle-ci ne donne qu'une solution singulière (769, 4°) : la 1re. conduit à l'intégrale complète $y = cx + C$, en désignant par C ce que devient Fy' lorsqu'on y remplace y' par c, ou $C = Fc$.

Ainsi $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ se met sous la forme $y = y'x + a\sqrt{(1 + y'^2)}$: d'où

$$y' = c \text{ et } x + \frac{ay'}{\sqrt{(1+y'^2)}} = 0$$

la 1re. donne pour intégrale complète $y = cx + a\sqrt{(1+c^2)}$: la 2e. conduit à la solution singulière $y^2 + x^2 = a^2$, lorsqu'on substitue dans la proposée $\frac{\pm x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ pour y'.

5. *Des Constantes arbitraires ; de l'Intégration des équations différentielles à l'aide des séries et de leurs constructions.*

773. Reprenons la série de Maclaurin (666)

$$y = fx = f + xf' + \tfrac{1}{2}x^2 f'' + \text{etc.}$$

dans laquelle $f\, f'\, f'' \ldots$ sont les valeurs constantes que prennent $fx\; f'x\; f''x \ldots$ lorsqu'on fait $x = 0$. Si l'équation dérivée donnée est du 1er. ordre, on en tirera aisément y', et par des dérivations successives, $y''\, y''' \ldots$ en fonction de x et y. Puisque $x = 0$ répond à $y = f$,

en substituant ces deux valeurs dans y' y''... on aura celles de f' f''... et par conséquent tout sera connu dans notre série excepté f qui demeurera arbitraire.

De même si la dérivée donnée est du 2e. ordre, on en tire y'' y'''... en fonction de x, y et y' : or $x=0$ répond à $y=f$ et $y'=f'$; mettant ces valeurs dans celles de y'' y'''..., puis dans la série, tout y est connu, excepté les constantes f et f' qui sont quelconques.

Et ainsi des ordres supérieurs.

Donc *l'expression de* y *renferme autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'ordre de la dérivée.* Quoique fondée sur la théorie des suites, cette conséquence a pourtant toute la rigueur convenable, puisqu'on peut regarder toute série comme le développement d'une expression finie $y=fx$, laquelle doit contenir autant de constantes arbitraires que la série.

774. Soit $f(x, y, a, b, \ldots)=0$ la primitive d'une dérivée donnée ; les constantes a b... introduites par l'intégration, sont rarement les valeurs $f f'$... de y y'... qui répondent à $x=0$, sans que pour cela notre démonstration cesse d'être exacte. En effet, si on applique à $f(x, y, a, b, \ldots)$ le théorème de Maclaurin, y prendra la forme $f+xf'+\frac{1}{2}x^2f''$... alors les constantes ff'... sont des fonctions de a b... ; en sorte qu'on peut substituer dans la primitive pour a b... leurs valeurs en ff',... ce qui rendra nécessairement le développement identique avec celui que nous avons obtenu.

Et si la nature de la fonction primitive f est telle que le théorème de Maclaurin ne puisse y être appliqué (667), parce que y ne devroit pas procéder suivant les puissances entières et positives de x ; on conçoit aisément que, par une transformation, on pourroit éviter cette difficulté, et qu'elle n'atteint pas notre conséquence.

Concluons de là que non-seulement notre démonstration est générale, mais encore que *de quelque manière qu'on soit parvenu à une intégrale, qui renferme le nombre convenable de constantes arbitraires, cette équation sera la primitive de la proposée, et renfermera nécessairement toute autre intégrale qui y satisferoit aussi, avec le même nombre de constantes arbitraires.*

775. En faisant $h = -x$ dans

$$f(x+h) = y + y'h + \tfrac{1}{2}y''h^2 + \ldots$$
$$f'(x+h) = y' + y''h + \tfrac{1}{2}y'''h^2 + \ldots$$
$$f''(x+h) = y'' + y'''h + \tfrac{1}{2}y^{\text{iv}}h^2 + \ldots \text{ etc.}$$

on a

$$(1)\ldots f = y - y'x + \tfrac{1}{2}y''x^2 - \ldots$$
$$(2)\ldots f' = y' - y''x + \tfrac{1}{2}y'''x^2 - \ldots$$
$$(3)\ldots f'' = y'' - y'''x + \tfrac{1}{2}y^{\text{iv}}x^2 - \ldots \text{ etc.}$$

Donc, 1°. si l'équation dérivée donnée est du 1er. ordre, on aura $y'y''\ldots$ en fonction de x et y; en sorte qu'en substituant dans la formule (1), on aura l'intégrale, f étant la constante arbitraire.

2°. Si l'équation proposée est du 2e. ordre, $y''y'''\ldots$ seront donnés en x, y et y'; en sorte qu'en substituant dans les équations (1 et 2), on aura deux équations entre x, y et y', chacune contenant une constante arbitraire, ce qui formera deux équations intégrales du 1er. ordre.

Et ainsi de suite. Il est d'ailleurs évident par la forme même de ces intégrales, qu'elles sont différentes. *Ainsi toute équation du n^{e}. ordre, a* n *intégrales de l'ordre* n — 1. Si ces dernières étoient connues, l'intégrale finie le seroit bientôt, puisqu'il suffiroit d'éliminer entre elles $y'y''\ldots y^{n-1}$. Donc ayant une équation dérivée du 2e. ordre, on aura également sa primitive absolue, soit en éliminant y' entre ses deux dérivées du 1er. ordre,

soit en cherchant une relation finie entre x et y, qui contienne deux constantes arbitraires et qui satisfasse à la proposée. On en dira autant des autres ordres.

Il nous resteroit à démontrer, sur l'intégration des équations des ordres supérieurs, plusieurs théorêmes relatifs aux facteurs propres à rendre intégrables et aux solutions singulières: mais comme ils s'éloignent de notre but, nous renverrons au XIIe. Jour. Polyt., leçons 13, 14 et 15, par Lagrange.

776. La théorie que nous venons d'exposer est démontrée complètement ; mais elle n'est pas toujours propre à faire connoître l'intégrale approximative ; il faut en effet que la série soit convergente. Il convient alors de recourir à des transformations qui amènent la fonction à l'état nécessaire pour qu'on puisse y appliquer les principes précédens. Nous ne dirons rien à cet égard, parce que l'exercice de l'analyse apprend ce qu'il faut faire mieux que toutes les règles : et les auteurs ont, en pareil cas, soin d'indiquer les transformations dont il font usage. Au reste, voici ce qu'on peut dire de plus général sur ce sujet, lorque l'intégrale ne doit pas procéder suivant les puissances entières et positives de x. On fera

$$y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

et il s'agira de déterminer les exposans $a\ b\ c \ldots$ et les coefficiens $A\ B\ C \ldots$ Pour cela on en tirera les valeurs de y', $y'' \ldots$ et on les substituera dans la dérivée proposée, que nous supposons du 1er. ordre, et qui devra être rendue identique : puis ordonnant par rapport à x, on comparera terme à terme les puissances de même ordre, ainsi que leurs coefficiens, à-peu-près comme n°s. 572 et 579 ; ce qui déterminera $a\ b \ldots\ A\ B \ldots$ Ainsi pour....... $(1 + y')y = 1$, on aura

$$(1+Aax^{a-1}+Bbx^{b-1}+..)(Ax^a+Bx^b+..)=x$$

d'où
$$\left.\begin{array}{l} A^2ax^{2a-1}+ABax^{a+b-1}+ACax^{a+c-1}+\dots \\ \qquad +ABbx^{a+b-1}+B^2bx^{2b-1}+\dots \\ \qquad\qquad +ACcx^{a+c-1}+\dots \\ -1 \quad +Ax^a \quad +Bx^b \quad +\dots \end{array}\right\} = 0.$$

Donc $2a-1=0$, $a+b-1=a$, $a+c-1=b$,....
$a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=\frac{3}{2}$....

puis $A^2a=1$, $AB(a+b)+A=0$,....
$A=\sqrt{2}$, $B=-\frac{2}{3}$, $C=\frac{1}{18}\sqrt{2}$...

et $y=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{2}}+\frac{1}{18}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}-\dots$

Si on eût pu présumer la loi des exposans, on auroit posé sur-le-champ $y=Ax^{\frac{1}{2}}+Bx^{\frac{2}{2}}+Cx^{\frac{3}{2}}+\dots$ ou plutôt, faisant la transformation $z^2=x$, on auroit pu ensuite appliquer la série de Maclaurin.

777. La méthode des coefficiens indéterminés conduit à une intégrale qui manque de généralité parce qu'elle est privée de constante arbitraire : mais si on change dans l'équation différentielle proposée x en $z+a$, et y en $t+b$, on développera t en z, en sorte que la série soit nulle lorsque $z=0$, puis substituant pour z et t leurs valeurs $x-a$ et $y-b$, on aura l'intégrale cherchée, où a et b tiendront lieu de la constante arbitraire c, puisque dans l'intégrale $f(x, y, c)=0$, c peut être déterminé en fonction de a et b. Il sera aisé d'étendre ces principes aux ordres supérieurs.

778. On peut aussi approcher des intégrales à l'aide des fractions continues. Suivons la notation page 109, et soit $y=Ax^a$, Bx^b, Cx^c,... ; la valeur de y sera représentée par $y=\frac{Ax^a}{1+z}$, z désignant le reste de la

fraction continue, ou $z = Bx^b$, Cx^c,... Substituant dans l'équation différentielle proposée, pour y cette valeur en négligeant z, ou faisant $y = Ax^a$, on ne conservera que les 1ers. termes, parce qu'on regarde x comme très-petit (note 618). On trouvera A et a par la comparaison des coefficiens et des exposans : puis on fera $y = \frac{Ax^a}{1+z}$, et il faudra raisonner de même pour la transformée en z: on fera donc $z = Bx^b$, au lieu de $z = \frac{Bx^b}{1+t}$; et ainsi de suite.

Par exemple, $my + (1 + x)y' = 0$, en faisant..... $y = Ax^a$, devient $(m + a) Ax^a + aAx^{a-1} = 0$, qui se réduit à $aAx^{a-1} = 0$, à cause de x très-petit (note n°. 618). Donc $a = 0$ et A reste indéterminé. On fait ensuite $y = \frac{A}{1+z}$, et on a $m(1 + z) = (1 + x) z'$; d'où posant $z = Bx^b$, on tire $m + Bx^b (m - b) = bBx^{b-1}$, ou plutôt $m = bBx^{b-1}$; donc $b = 1$ et $B = m$. On fera ensuite $z = \frac{mx}{1+t}$, etc., et on obtiendra

$$y = A,\ mx,\ -\tfrac{1}{2}(m-1)x,\ \tfrac{1}{6}(m+1)x - \tfrac{1}{6}(m-2)x, \ldots$$

Comme l'équation proposée a pour intégrale........ $y = A(1 + x)^{-m}$, on a ainsi le développement en fraction continue de cette fonction.

On pourroit en déduire l'intégrale sous la forme d'une série (*Voy*. 543, 6°.)

Consultez sur ce sujet le Calcul intégral de Lacroix, tome II, n°. 598 : ouvrage dont on ne sauroit trop recommander la lecture, et dans lequel on trouve réuni tout ce qui est connu sur la doctrine de l'intégration.

779. Lorsqu'une équation différentielle proposée appartient 60.

à une courbe, il peut être utile de la construire sans intégrer ; or, c'est ce qui est toujours possible, et voici comment.

Supposons d'abord que l'équation soit du 1er. ordre $F(x, y, y') = 0$: concevons que la constante soit déterminée par la condition que $x = a$ donne $y = b$.
60. On prendra $AB = a$, $BC = b$, et le point C sera sur la courbe cherchée. En substituant a et b pour x et y dans $F = 0$, on en tirera pour y' une valeur qui fixera la direction de la tangente KC au point C. Prenons un point D assez voisin de C, pour qu'on puisse, sans erreur notable, regarder la droite CD comme confondue avec l'arc de courbe ; $AF = a'$, $FD = b'$ seront donc les coordonnées du point D de notre courbe ; en sorte qu'on pourra faire $x = a'$, et $y = b'$ dans $F = 0$, et en tirer la valeur de y' correspondante, et par conséquent la situation de la tangente IE. On continuera d'opérer de même, et on voit que la courbe sera remplacée par un polygone $CDEZ$.

On pourroit encore raisonner de la manière suivante. On tireroit de l'équation $F=0$ et de sa dérivée, les valeurs de y' et y'' en fonction de x et y, et on les substitueroit dans celle du rayon de courbure R, (684). Puis, traçant la tangente KC, et menant la perpendiculaire CN égale à ce rayon, x et y étant remplacés par a et b, on décriroit du centre N un arc de cercle CD ; on regarderoit ensuite le point D comme étant sur la courbe, ses coordonnées étant a' et b'. On méneroit de nouveau la tangente ID et le rayon de courbure DO, etc. La courbe seroit alors remplacée par un système d'arcs de cercle contigus. Il est même évident que l'erreur seroit moindre qu'en se servant des tangentes seules, et qu'on pourroit en conséquence prendre les points CDE

plus écartés les uns des autres ; ce qui rendroit les constructions moins pénibles.

780. Si l'équation différentielle proposée est du 2e. ordre, $F(x, y, y', y'') = 0$; après avoir choisi de même un point arbitraire C, pour un de ceux de la courbe, il faut en outre prendre encore une droite quelconque KC pour tangente en C : cette double condition détermine les deux constantes. On tirera la valeur de y'', et par suite celle du rayon de courbure R, en fonction de x, y et y' ; et comme ces quantités sont connues pour le point C, on décrira l'arc de cercle CD, comme précédemment. Le point D de cet arc étant supposé sur la courbe, on décrira sa normale DN, et on calculera la valeur de R pour le point D, dont on connoît les coordonnées et la direction de la tangente ; et ainsi de suite. 60.

Un raisonnement semblable donne le moyen de remplacer la courbe par une série d'arcs de paraboles osculatrices. On pourroit aussi appliquer ces principes aux équations différentielles du 3e. ordre ; mais alors non-seulement il faudroit prendre arbitrairement un point C, et sa tangente KC, mais encore le rayon CN du cerle osculateur en ce 1er. point, ce qui détermineroit les trois constantes arbitraires On ne pourroit ensuite remplacer la courbe que par une suite de paraboles dont le contact seroit du 3e. ordre. On en dira autant des ordres supérieurs.

6. *Des Équations des ordres supérieurs et en particulier du second ordre.*

781. La plus simple des équations dérivées de l'ordre n est $y^{(n)} = Fx$, qu'on peut mettre sous la forme... $dy^{(n-1)} = Fx.dx$. Soit X l'intégrale de $Fx.dx$, on a

$y^{(n-1)} = c + X$, et on opérera de même que sur la proposée; etc. . . . Ainsi pour $d^2y = adx^2$ ou $dy' = adx$ on trouve y' $ax + c$; puis $y = b + cx + \frac{1}{2}ax^2$, b et c étant les constantes arbitraires.

De même $y'' = ax^n$ donne . . . .
$y = b + cx + \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$. Si $n = -1$, on trouve
$y = b + ax + ax \log x$; et si $n = -2$, on a . . . . . .
$y = b + cx - a \log x$.

782. Lorsqu'une équation du 2e. ordre ne contient ni x, ni y, elle a la forme $f(y'', y') = 0$: en mettant $\frac{dy'}{dx}$ pour y'', elle devient du 1er. ordre entre x et y'. On en tire $dx = Fy'.dy'$; et comme. . . . .
$dy = y'dx = Fy'.y'dy'$, en désignant par $x = M + A$, $y = N + B$ les intégrales de ces équations, il ne reste plus qu'à éliminer y' entre elles (775), et on aura l'intégrale complète de la proposée, A et B étant les constantes arbitraires.

Soit $ay'' + (1 + y'^2)^2 = 0$; on trouve

$$-ady' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} dx;$$

d'où $$dx = \frac{-ady'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad dy = \frac{-ay'dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

puis $$x = A - \frac{ay'}{\sqrt{(1+y'^2)}}, \quad y = B + \frac{a}{\sqrt{(1+y'^2)}},$$

et enfin $$(A - x)^2 + (B - y)^2 = a^2.$$

Cette intégration donne la solution de ce problème : quelle est la courbe dont le rayon de courbure est constant, ou $R = a$? Le cercle jouit seul de cette propriété.

Le procédé ci-dessus s'applique à tous les ordres, pourvu que l'équation soit de la forme $F\{y^{(n)}, y^{(n-1)}\} = 0$. Ainsi pour $f(y''', y'') = 0$, on fera $dy'' = y'''dx$, d'où $x = \int Fy''.dy''$, et $y' = \int y''dx = \int(Fy''.y''dy'')$. Mettant ensuite pour y' cette intégrale dans $dy = y'dx$, on parvient à des valeurs de x et de y exprimées en y'', et renfermant trois constantes arbitraires : on élimine ensuite y'' entre elles (775).

783. Passons aux équations de la forme $y'' = Fy$: en multipliant par $y'dx = dy$, et à cause de $y''dx = dy'$, on a $y'dy' = Fy.dy$, d'où

$$\tfrac{1}{2}y'^2 = \tfrac{1}{2}c + \int Fy.dy \text{ et } y' = \sqrt{(c + 2\int Fy.dy)};$$

puis
$$x = \int \frac{dy}{y'} = \int \frac{dy}{\sqrt{(c + 2\int Fy.dy)}}.$$

Par exemple, $a^2d^2y + ydx^2 = 0$, ou $a^2y'' = -y$, devient $a^2y'dy' = -ydy$, d'où $a^2y'^2 = c^2 - y^2$, puis $dx = \dfrac{ady}{\sqrt{(c^2 - y^2)}}$; donc intégrant, on a

$$x = a.\text{arc}\left(\sin = \frac{y}{c}\right) + b, \text{ ou } \frac{y}{c} = \sin\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

qui équivaut à $y = c \sin \dfrac{x}{a} + c' \cos \dfrac{x}{a}$.

De même $d^2y.\sqrt{(ay)} = dx^2$, donne $\tfrac{1}{4}ay'^2 = c + \sqrt{(ay)}$;

d'où $2\,dx = \dfrac{dy.\sqrt{a}}{\sqrt{(c + \sqrt{y})}}$: on fait $c + \sqrt{y} = z^2$; on intègre et on trouve enfin

$$x = \tfrac{2}{3}\sqrt{a.(\sqrt{y} - 2c)}\sqrt{\{c + \sqrt{y}\}} + b.$$

Ce procédé s'applique à toutes les équations de la forme $y^{(n)} = Fy^{(n-2)}$; car soit, par exemple, $y^{\text{IV}} = Fy''$; comme $y^{\text{IV}}dx^2 = d^2y'' = Fy''.dx^2$, on intégrera deux fois,

et on aura $x = \varphi y''$, avec deux constantes. D'ailleurs $y' = \int y''dx$ s'intègre après avoir mis pour dx sa valeur en y'' : substituant ensuite cette valeur de dx, et celle de y' dans $y = \int y'dx$, on obtient aussi y en y''. Il ne reste plus qu'à éliminer y'' à l'aide de $x = \varphi\, y''$, et le résultat, qui contient quatre constantes arbitraires est l'intégrale complète cherchée.

784. Dans les équations du 1er. ordre, on a pu prendre pour principale telle variable qu'on a voulu, sans que pour cela les procédés d'intégration exigeassent des modifications ; c'est un des avantages qu'offre la notation de Leibnitz (656). Mais il est maintenant indispensable d'indiquer, dans chaque équation différentielle, quelle est celle qu'on a prise pour constante, et d'y avoir égard à chaque transformation que peut nécessiter le calcul. Par la suite, nous supposerons toujours dx constant, à moins que nous ne prévenions du contraire.

Si donc on veut que dx soit constant au lieu de toute autre différentielle qu'on a regardée comme telle dans une équation donnée, il faut modifier l'équation à l'aide de la théorie connue (654). Ainsi, pour $dsdy = ad^2x$, ou $ax'' = y'$, on a pris pour constant $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: donc $a(s'x'' - x's'') = y's'^2$; puis posant $x' = 1$, on a

$$y's'^2 = -as'', \text{ ou } (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = -adxd^2y$$

où dx est constant. Cette équation, mise sous la forme

$ay'' + (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0$, vient d'être intégrée (782).

Ce n'est pas au reste qu'on ne puisse quelquefois préférer à x toute autre variable principale.

Pareillement, ds est constant dans l'équation......
$(dx^2 + dy^2)\dfrac{d^2y}{dx^4} = \dfrac{1}{a}\cos\dfrac{x}{c}$; pour que dx soit constant,

on remarquera que cette équation équivaut à

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dx^4}{ds^4} \cdot \frac{1}{a} \cos \frac{x}{c};$$

qu'on écrit $y'' = x'^4 . \frac{1}{a} \cos \frac{x}{c}$, s étant toujours variable principale ; d'où $\frac{s'y'' - s''y'}{x'^4} s' = \frac{1}{a} \cos \frac{x}{c}$, aucune dérivée n'étant constante. Enfin $x' = 1$, donne......... $s' = \sqrt{(1 + y'^2)}$, $s's'' = y'y''$, puis

$$y'' = \frac{1}{a} \cos \frac{x}{c}, \text{ ou } dy' = \frac{dx}{a} \cos \frac{x}{c};$$

dx est constant, et k et b sont les constantes arbitraires,

$$y' = \frac{c}{a} \sin \frac{x}{c} + b, \text{ d'où } y = k + bx - \frac{c^2}{a} \cos \frac{x}{c}.$$

785. Lorsqu'une équation du 2e. ordre ne contient pas y, elle a la forme $f(x, y', y'') = 0$; elle se ramène au 1er. ordre, en mettant $\frac{dy'}{dx}$ pour y'', et rentre alors dans les cas déja traités. Il est inutile de remarquer qu'on saura l'intégrer toutes les fois qu'elle sera séparable, ou homogène, ou etc.

Lorsqu'on sait résoudre l'intégrale par rapport à y', et qu'on a $y' = Fx$, on en tire $y = \int y' dx = \int Fx.dx$. Si, au contraire, on peut tirer la valeur de x en y', telle que $x = Fy'$, on a $y = \int y' dx = xy' - \int x dy'$, à l'aide de l'intégration par parties : donc .... $y = xy' - \int Fy'.dy'$. On élimine ensuite y', à l'aide de $x = Fy'$.

Si on ne peut employer l'une ou l'autre de ces voies, on cherchera à exprimer x et y', à l'aide de quelque transformation, par des fonctions X et Y d'une 3e. variable z ; car $x = X$ et $y' = Y$, donne $y = \int y' dx = \int Y dX$.

1°. Quelle est la courbe dont le rayon de courbure R est réciproque à l'abscisse? Soit $R=\frac{a^2}{2x}$, on a (684) à intégrer

$$2x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=a^2y'',$$

ou $2x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\,dx=a^2dy'$, qui est séparable. Donc $2x\,dx=\frac{a^2dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, $x^2+c=\frac{a^2y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}$. En tirant la valeur de y', $y=\int y'dx$ donne

$$y=\int\frac{(x^2+c)\,dx}{\sqrt{\{a^4-(x^2+c)^2\}}};$$

la ligne demandée est formée par une lame *Elastique* qu'on courbe. *Voy.* n°. 820, VIII.

Si on eût voulu que R fût une fonction X donnée de l'abscisse x, on auroit posé $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=Xy''$. Le même calcul auroit donné $\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}=V$, en désignant $\int\frac{dx}{X}$ par V. On en tire $y=\int\frac{Vdx}{\sqrt{(1-V^2)}}$.

Telle est la solution du *problème inverse des rayons de courbure.*

2°. Soit $(1+y'^2)+xy'y''=ay''\sqrt{(1+y'^2)}$: on met cette équation sous la forme

$$dx(1+y'^2)+xy'dy'=ady'.\sqrt{(1+y'^2)}$$

qui est linéaire (763, II) et devient intégrable en la divisant par $\sqrt{(1+y'^2)}$. On trouve $x=\frac{ay'+b}{\sqrt{(1+y'^2)}}$. Mais $y=y'x-\int xdy'$ devient

$$y=y'x-a\sqrt{(1+y'^2)}+b\log\{y'+\sqrt{(1+y'^2)}\}-b\log c$$
$$=\frac{by'-a}{\sqrt{(1+y'^2)}}-b\log\left\{\frac{y'+\sqrt{(1+y'^2)}}{c}\right\};$$

il ne reste plus qu'à chasser de là y', à l'aide de la valeur de x. On trouve, tout calcul fait, et en faisant, pour abréger $z=\sqrt{(a^2+b^2-x^2)}$

$$y=z-b\log\frac{b+z}{c(x-a)}.$$

3°. Soit encore $2(a^2y'^2+x^2)y''=xy'$, ou.... $2(a^2y'^2+x^2)\,dy'=xy'dx$. Cette équation est homogène (759), et devient séparable en posant $x=y'z$, d'où $\frac{dy'}{y'}=\frac{zdz}{2a^2+z^2}$. On intègre par logarithmes, et il vient

$$y'=c\sqrt{(2a^2+z^2)},\ \text{et}\ x=cz\sqrt{(2a^2+z^2)};$$

or $y=\int y'dx$, lorsqu'on met pour y et dx leurs valeurs en z, devient $y=\frac{2}{3}c^2z(3a^2+z^2)+b$. Il faudra enfin éliminer z, entre ces valeurs de x et y.

786. Supposons que l'équation du 2ᵉ. ordre ait la forme $f(y'', y', y)=0$, c.-à-d. que x n'y entre pas. En multipliant $dy'=y''dx$, par $y'dx=dy$, on trouve

$$y''=\frac{y'dy'}{dy};$$

la substitution de cette valeur réduira donc la proposée au 1ᵉʳ. ordre entre y et y'.

Par exemple, si on a $y''=f(y',y)$, on trouvera $y'dy'=dy.f(y',y)$, dont la forme est assez simple.

Si l'intégrale qu'on obtiendra est résoluble par rapport à y', en sorte que $y'=Fy$, on aura $dx=\frac{dy}{y'}=\frac{dy}{Fy}$, et on en conclura aisément x en y. Si on peut tirer y en

fonction de y', ou $y = Fy'$, $dy = y'dx$ donnera

$$x = \int \frac{d.Fy'}{y'} = \int \frac{F'}{y'} dy', \text{ ou} = \frac{Fy'}{y'} + \int \frac{Fy'}{y'^2} . dy',$$

on chassera ensuite y' de l'intégrale à l'aide de $y = Fy'$. Enfin, si ces deux cas n'ont pas lieu, on cherchera à exprimer y' et y en fonction d'une 3e. variable z, et $y'dx = dy$ deviendra $Zdx = Tdz$, etc.

1°. Pour $y''(yy' + a) = y'(1 + y'^2)$, on change cette équation en

$$dy'(yy' + a) = dy(1 + y'^2);$$

d'où (761) $\quad dy - \dfrac{yy'dy'}{1 + y'^2} = \dfrac{ady'}{1 + y'^2},$

donc $\quad \dfrac{y}{\sqrt{(1 + y'^2)}} = \dfrac{ay'}{\sqrt{(1 + y'^2)}} + c$

$$y = ay' + c\sqrt{(1 + y'^2)}$$

$$x = \int \frac{dy}{y'} = a \log by' + c \log \{y' + \sqrt{(1 + y'^2)}\}.$$

Il faut ensuite éliminer y' entre ces équations. On trouve par exemple, lorsque $c = 0$,

$$x = a \log\left(\frac{by}{a}\right); \text{ d'où } y = Ce^{\frac{x}{a}}.$$

2°. L'équation $aby'' = \sqrt{(y^2 + a^2y'^2)}$ devient

$$aby'dy' = dy\sqrt{(y^2 + a^2y'^2)}.$$

Pour intégrer, on fera $y' = \dfrac{y}{z}$, à cause de l'homogénéité, et on aura $abzdy - abydz = z^2dy\sqrt{(z^2 + a^2)}$; l'équation est séparable, et faisant ensuite $\sqrt{(z^2 + a^2)} = tz$, on en tire z, dz, et on substitue; on trouve

$$\frac{dy}{y} = \frac{-btdt}{bt^2 - at - b};$$

Il sera aisé d'obtenir y en fonction de t, ainsi que y' : par conséquent aussi $x = \int \frac{dy}{y'}$. On éliminera ensuite t.

3°. Soit $y'' + Ay' + By = 0$, A et B étant constans : on a l'équation homogène $y'dy' + Ay'dy + Bydy = 0$; faisant $y' = yu$, on trouve

$$\frac{dy}{y} = \frac{-udu}{u^2 + Au + B} = \frac{-u\,du}{(u-a)(u-b)};$$

en désignant par a et b les racines de $u^2 + Au + B = 0$;

d'où $$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{uy} = \frac{-du}{(u-a)(u-b)};$$

puis $$\frac{dy}{y} - adx = \frac{-du}{u-b}, \quad \frac{dy}{y} - bdx = \frac{-du}{u-a}$$

$$\log y - ax = \log\left(\frac{m}{u-b}\right), \quad \log y - bx = \log\left(\frac{n}{u-a}\right)$$

$$u - a = \frac{n}{y} e^{bx}, \quad u - b = \frac{m}{y} e^{ax};$$

enfin retranchant, on obtient pour intégrale complète $y(b-a) = -me^{ax} + ne^{bx}$, qu'on peut mettre sous la forme $y = Ce^{ax} + De^{bx}$, C et D étant des constantes arbitraires.

Si a et b sont imaginaires, ou $a = k - h\sqrt{-1}$, $b = k + h\sqrt{-1}$, on trouve

$$y = e^{kx}(Ce^{-hx\sqrt{-1}} + De^{hx\sqrt{-1}}).$$

Mettant pour $e^{\pm hx\sqrt{-1}}$ sa valeur tirée de l'équation n°. 580, 3°., on a

$$y = e^{kx}(C'\cos hx + D'\sin hx) = C''e^{kx}\cos(hx + f)$$

fonction de y', ou $y = Fy'$, $dy = y'dx$ donnera

$$x = \int \frac{d.Fy'}{y'} = \int \frac{F'}{y'} dy', \text{ ou} = \frac{Fy'}{y'} + \int \frac{Fy'}{y'^2} . dy',$$

on chassera ensuite y' de l'intégrale à l'aide de $y = Fy'$. Enfin, si ces deux cas n'ont pas lieu, on cherchera à exprimer y' et y en fonction d'une 3e. variable z, et $y'dx = dy$ deviendra $Zdx = Tdz$, etc.

1°. Pour $y'' (yy' + a) = y' (1 + y'^2)$, on change cette équation en

$$dy' (yy' + a) = dy (1 + y'^2);$$

d'où (761) $$dy - \frac{yy'dy'}{1 + y'^2} = \frac{ady'}{1 + y'^2},$$

donc $$\frac{y}{\sqrt{(1 + y'^2)}} = \frac{ay'}{\sqrt{(1 + y'^2)}} + c$$

$$y = ay' + c \sqrt{(1 + y'^2)}$$

$$x = \int \frac{dy}{y'} = a \log by' + c \log \{y' + \sqrt{(1 + y'^2)}\}.$$

Il faut ensuite éliminer y' entre ces équations. On trouve par exemple, lorsque $c = 0$,

$$x = a \log \left(\frac{by}{a}\right); \text{ d'où } y = Ce^{\frac{x}{a}}.$$

2°. L'équation $aby'' = \sqrt{(y^2 + a^2y'^2)}$ devient

$$aby'dy' = dy \sqrt{(y^2 + a^2y'^2)}.$$

Pour intégrer, on fera $y' = \frac{y}{z}$, à cause de l'homogénéité, et on aura $abzdy - abydz = z^2dy \sqrt{(z^2 + a^2)}$; l'équation est séparable, et faisant ensuite $\sqrt{(z^2 + a^2)} = tz$, on en tire z, dz, et on substitue; on trouve

$$\frac{dy}{y} = \frac{-btdt}{bt^2 - at - b};$$

Il sera aisé d'obtenir y en fonction de t, ainsi que y': par conséquent aussi $x = \int \frac{dy}{y'}$. On éliminera ensuite t.

3°. Soit $y'' + Ay' + By = 0$, A et B étant constans : on a l'équation homogène $y'dy' + Ay'dy + Bydy = 0$; faisant $y' = yu$, on trouve

$$\frac{dy}{y} = \frac{-udu}{u^2 + Au + B} = \frac{-u\,du}{(u-a)(u-b)};$$

en désignant par a et b les racines de $u^2 + Au + B = 0$;

d'où $$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{uy} = \frac{-du}{(u-a)(u-b)};$$

puis $$\frac{dy}{y} - adx = \frac{-du}{u-b}, \quad \frac{dy}{y} - bdx = \frac{-du}{u-a}$$

$$\log y - ax = \log\left(\frac{m}{u-b}\right), \quad \log y - bx = \log\left(\frac{n}{u-a}\right)$$

$$u - a = \frac{n}{y} e^{bx}, \quad u - b = \frac{m}{y} e^{ax};$$

enfin retranchant, on obtient pour l'intégrale complète $y(b-a) = -me^{ax} + ne^{bx}$, qu'on peut mettre sous la forme $y = Ce^{ax} + De^{bx}$, C et D étant des constantes arbitraires.

Si a et b sont imaginaires, ou $a = k - h\sqrt{-1}$, $b = k + h\sqrt{-1}$, on trouve

$$y = e^{kx}(Ce^{-hx\sqrt{-1}} + De^{hx\sqrt{-1}}).$$

Mettant pour $e^{\pm hx\sqrt{-1}}$ sa valeur tirée de l'équation n°. 580, 3°., on a

$$y = e^{kx}(C' \cos hx + D' \sin hx) = C'' e^{kx} \cos(hx + f)$$

$$\varphi z^2 t' = \int R\varphi z dx$$

puis $$y = tz = z\int\frac{dx}{\varphi z^2}\int R\varphi z dx \ldots (4)$$

Il importe de remarquer que la double intégration que renferme ce résultat, introduit deux constantes arbitraires, et que par conséquent l'intégrale complète de la proposée permet d'employer pour les valeurs de z et φ des fonctions quelconques de x qui satisfassent aux équations 1 et 3.

Appliquons ces préceptes à l'équation

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{a}{x^2 - 1}$$

on a $z'' + \frac{z'}{x} = \frac{z}{x^2}$, d'où $du + \left(u^2 + \frac{u}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = 0$

équation qu'on rend homogène en faisant $u = \frac{1}{v}$, et qu'on sépare ensuite, en posant $x = vs$. On trouve

$$\frac{dv}{v} = -\frac{s^2 + s - 1}{s(s^2 - 1)}ds, \quad \text{d'où } v = \frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{s+1}{s-1}\right)}$$

en ne mettant pas de constante additive. Restituant pour v et s leurs valeurs $\frac{1}{u}$ et ux, on obtient

$$u = \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}, \int u dx = \log\frac{x^2 - 1}{x}, \quad e^{\int u dx} = \frac{x^2 - 1}{x},$$

or $\varphi = x$ et $R = \frac{a}{x^2 - 1}$ donnent

$$t' = \frac{x}{(x^2 - 1)^2}(ax + b)$$

d'où on tire t et ensuite tz, ou

$$y = -\frac{ax+b}{2x} + \frac{x^2-1}{4x}\, a \log\left\{c\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right\}.$$

De même $y'' - \frac{a^2-1}{4x^2}\, y = \frac{m}{\sqrt{x^{a+1}}}$, donne . . . . .
$z'' - \frac{(a^2-1)\,z}{4x^2} = 0$; équation à laquelle on satisfait en prenant $z = \sqrt{x^{a+1}}$; d'ailleurs $\phi = 1$, donc

$$t' = \frac{mx+b}{x^{a+1}},\; y = \frac{1}{\sqrt{x^{a-1}}}\left\{cx^a - \frac{b}{a} - \frac{mx}{a-1}\right\}$$

789. Soit l'équation $Ay + By' + \ldots Ky^{(n)} = 0$, dont les coefficiens sont constans; faisons $y = ce^{hx}$, d'où

$$A + Bh + Ch^2 + \ldots Kh^n = 0.$$

donc si on prend pour h les diverses racines h', h'',... de cette équation, en faisant $y = c'e^{h'x}$, ou $c''e^{h''x}$,... la proposée sera satisfaite : la somme de ces quantités jouira donc de la même propriété, et

$$y = c'e^{h'x} + c''e^{h''x} + c'''e^{h'''x} \ldots$$

sera donc l'intégrale complète, c', c'',... étant les n constantes arbitraires.

S'il y a des racines imaginaires, elles seront par couples, $h = a \pm b\sqrt{-1}$, et deux de nos termes réunis formeront $e^{ax}\,(ce^{bx\sqrt{-1}} + c'e^{-bx\sqrt{-1}})$, qu'on réduit à l'aide du n°. 580 3°., à $e^{ax}\,(m \cos bx + n \sin bx)$ ou . . . . $ke^{ax} \sin\,(bx + l)$.

Si deux racines sont égales, comme $h' = h + \alpha$ donne $e^{hx}\,(c + c'e^{\alpha x})$ pour deux de nos termes, en développant $e^{\alpha x}$, on a $e^{hx}\,(c + c' + c'\alpha x + \text{etc.})$, ou $e^{hx}\,(m + nx + \ldots)$ en remplaçant $c + c'$ et $c'\alpha$ par m et n. Faisant $\alpha = 0$,

on a $e^{hx}(m+nx)$. Pour trois racines égales, on auroit de même $e^{hx}(m+nx+lx^2)$ ... etc.

Ainsi pour $y-2y'+2y''-2y'''+y^{\text{IV}}=0$, on a

$$1-2h+2h^2+2h^3+h^4=0=(1-h)^2(1+h^2)$$

d'où $y=e^x(m+nx)+A\cos x+B\sin x$.

790. L'équation *Linéaire* de tous les ordres à coefficiens constans est

$$Ay+By'+Cy''+\ldots+Ky^{(n)}=X,$$

X désignant une fonction donnée de x; $A\ B\ldots$ étant constans. On sait toujours en réduire l'intégration à la résolution des équations par le procédé suivant, que nous appliquerons seulement au 2e. ordre

$$Ay+By'+Cy''=X.$$

Soit $e^{-hx}dx$ le facteur qui la rend intégrable : comme $Xe^{-hx}dx$ est la différentielle d'une fonction de x, telle que P, le 1er. membre $e^{-hx}dx\,(Ay+By'+Cy'')$ est aussi celle d'une fonction de la forme $e^{-hx}(ay+by')$. Différentions donc ce résultat et comparons terme à terme, nous aurons

$$-ha=A,\quad -hb+a=B,\ b=C$$

d'où $\quad A+Bh+Ch^2=0,\ a=\dfrac{A}{h},\ b=C.$

la constante inconnue h est l'une des racines de la 1re. de ces équations, les deux autres donnent a et b, et l'intégrale du 1er. ordre

$$ay+by'=e^{hx}(P+c).$$

Il faudra de nouveau opérer sur cette équation, ou plutôt

mettre pour h, les deux racines h' et h'', puis éliminer y' entre les deux résultats, ce qui donnera l'intégrale complète (775).

Pour l'équation du degré n, le même raisonnement prouve que h est racine de l'équation

$$A + Bh + Ch^2 \ldots + Kh^n = 0$$

et autant on aura de racines, autant on aura d'intégrales de l'ordre $n - 1$, de la forme

$$ay + by' + cy'' + \ldots ky^{(n-1)} = e^{hx} (P + c)$$

entre lesquelles on éliminera un nombre égal de quantités $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$ ... ce qui réduira le problême à un ordre d'autant moindre, ou même fera connoître l'intégrale complète, si on a toutes les racines. Voyez le *Calcul int. d'Euler*, II, p. 402. on a

$$a = -\frac{A}{h}, \; b = \frac{a - B}{h}, \; c = \frac{b - C}{h} \ldots l = \frac{k - L}{h}.$$

7. *Quelques Problêmes de Géométrie.*

791. Les questions suivantes feront juger de l'utilité du calcul intégral dans la résolution des problêmes.

I. Lorsque dans l'équation $F(x, y, c) = 0$ d'une courbe, la constante c est arbitraire, et qu'on lui attribue successivement toutes les valeurs possibles, on a un systême infini de lignes. On nomme *Trajectoires* les courbes qui coupent celles-ci sous le même angle ; en sorte que si, par exemple, la trajectoire est *Orthogonale*, en menant des tangentes au point d'intersection de cette ligne par la ligne variable, ces tangentes soient à angles droits.

Voici le moyen général d'obtenir l'équation $f(x, y) = 0$ des trajectoires. Soit $F(Y, X, c) = 0$ l'équation de la

61. courbe mobile, à raison du paramètre variable c. Pour une valeur de c, cette courbe prend une situation déterminée AM : menons des tangentes à cette ligne et à la trajectoire DM en leur point commun M; Y' et y' en fixeront les inclinaisons, et l'angle $T'MT$ qu'elles forment entre elles a pour tangente $a = \frac{y' - Y'}{1 + Y'y'}$, d'où

$$(1 + Y'y')\,a + Y' - y' = 0 \ldots . (1)$$

Il faut ici remplacer Y et X par y et x, parce qu'il s'agit du point commun aux deux courbes : a est une quantité constante donnée. Le raisonnement du n°. 460 démontre que si on élimine c, entre cette équation et celle $F(y, x, c) = 0$ de la courbe coupée, et qu'on intègre, on aura celle de la trajectoire. Si elle est orthogonale, on trouve simplement

$$1 + Y'y' = 0 \ldots . (2)$$

Par exemple, si on demande la courbe qui coupe à angle droit une droite qui tourne sur l'origine fixe, $Y = cX$ donnera $Y' = c$, et l'équation (2) deviendra $1 + cy' = 0$: éliminant c à l'aide de $y = cx$, on trouve $xdx + ydy = 0$, d'où $x^2 + y^2 = A^2$. Donc la trajectoire est un cercle de rayon arbitraire.

Mais si la droite doit être coupée sous un angle donné, dont a est la tangente, le même calcul appliqué à l'équation (1) donne, pour l'équation différentielle de la trajectoire,

$$y + ax = y'(x - ay).$$

On intègre cette équation homogène, et on a

$$a \log c \sqrt{(x^2 + y^2)} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right),$$

qui appartient à la spirale logarithmique (474), ainsi qu'on peut s'en convaincre en traduisant cette relation en coordonnées polaires (385).

Pour l'équation $X^mY^n = c$, qui appartient aux hyperboles et paraboles de tous les ordres, le calcul donne pour la trajectoire, l'équation homogène . . . . . $(nx + amy)y' = anx - my$; et si elle doit être orthogonale, $myy' = nx$ ayant pour intégrale $my^2 - nx^2 = A$, la trajectoire est une hyperbole du 2e. degré ou une ellipse, suivant que l'exposant n est positif ou négatif.

La trajectoire orthogonale du cercle qui a pour équation $y^2 = 2cx - x^2$, est un autre cercle, dont l'équation est $y^2 + x^2 = Ay$. On le construit en prenant pour centre un point quelconque de l'axe des y, et pour rayon la distance de ce point à l'origine.

II. Quelle est la courbe dont en chaque point la longueur n de la normale et l'abscisse t du pied de cette droite, ont entre elles une relation donnée $n = Ft$. Puisque (678) on a $t = x + yy'$ et $n = y\sqrt{(1 + y'^2)}$, il est clair que le problème proposé se réduit à intégrer l'équation $y\sqrt{(1 + y'^2)} = F(x + yy')$.

Par exemple, si on demande que n et t soient les coordonnées d'une parabole, on aura $n^2 = 2pt$, $2p$ étant le paramètre donné, d'où

$$y^2(1 + y'^2) = 2p(x + yy'),$$

Pour intégrer cette équation, résolvons-la par rapport à yy', puis divisons tout par le radical, nous aurons . . $\frac{p - yy'}{\sqrt{(p^2 + 2px - y^2)}} + 1 = 0$: or le 1er. terme est visiblement la dérivée de $\sqrt{(p^2 + 2px - y^2)}$, donc . . . . $\sqrt{(p^2 + 2px - y^2)} + x = a$. Si on carre, on obtient, en mettant c au lieu de la constante arbitraire $a + p$,

$$y^2+x^2-2cx+c^2-2pc=0;$$

la courbe cherchée est donc un cercle dont le centre est en un lieu quelconque de l'axe des x, et dont le rayon est moyen proportionnel entre sa distance à l'origine et $2p$. C'est, au reste, ce qui est d'ailleurs visible. Mais outre cette multitude infinie de cercles qui satisfont au problème, il y a encore pour solution une parabole; car en remontant aux procédés des nos. 765 et 769, on trouvera l'équation singulière $y^2=2px+p^2$. Il est facile de vérifier (comme on l'a vu no. 766, 3°.) que cette parabole résulte de l'intersection continuelle de tous les cercles successifs compris dans la solution générale.

III. Trouver une courbe telle que les perpendiculaires abaissées de deux points fixes sur toutes ses tangentes, forment un rectangle constant $=k$. Prenons pour axe des x la ligne qui joint les deux points; l'un étant à l'origine, et l'autre distant de $2a$: le no. 374 donne les distances de ces deux points à la tangente, qui a pour équation $Y-y=y'(X-x)$, et on trouve

$$(2ay'+y-y'x)(y-y'x)=k(1+y'^2)\ldots\text{(1)}$$

Cette équation s'intègre en la différentiant d'abord; y'' est facteur commun, et on trouve

$$-x(2ay'+y-y'x)+(y-y'x)(2a-x)=2ky'\ldots\text{(2)}$$

et $y''=0$. Celle-ci donne $y'=c$, qui change la proposée en

$$(2ac+y-cx)(y-cx)=k(1+c^2);$$

ce sont les équations de deux droites; et il est aisé de s'assurer qu'elles répondent en effet au problème. Le nombre des droites comprises par couple dans cette relation, est d'ailleurs infini.

Quant à l'équation (2), si on en tire la valeur de y', et qu'on la substitue dans (1), on trouvera, en changeant x en $x+a$,

$$y^2(a^2+k)+kx^2=k(a^2+k).$$

On trouve donc une ellipse qui a pour foyers les points fixes donnés, et pour demi-axes $\sqrt{(k+a^2)}$ et $\sqrt{k}$. Cette courbe est une solution singulière du problême, et résulte de l'intersection successive des droites comprises dans l'intégrale complète.

On pourra s'exercer aux questions suivantes :

IV. Trouver une courbe telle que toutes les perpendiculaires abaissées d'un point donné sur ses tangentes soient égales ?

V. Quelle est la courbe telle que les lignes menées à deux points fixes d'un point quelconque de son cours, soient également inclinées sur la tangente.

8. *Élimination entre les Équations différentielles.*

792. Si on a deux équations entre x, y et t, l'élimination de t conduira à une relation entre x et y ; mais si ces équations sont différentielles, ce calcul exige des procédés nouveaux. Soient donc

$$(Mx+Ny)\,dt+P\,dx+Q\,dy=\tau\,dt$$
$$(M_{,}x+N_{,}y)\,dt+P_{,}dx+Q_{,}dy=\tau_{,}dt;$$

ce sont les équations les plus générales à trois inconnues. Eliminons dy entre elles, et divisons par le coefficient de dx; faisons-en autant pour dx, et nos équations seront mises sous la forme plus simple

$$(ax+by)\,dt+dx=T\,dt$$
$$(a'x+b'y)\,dt+dy=S\,dt.$$

Nous supposerons ici que les coefficiens sont constans, et T, S des fonctions de t. Multiplions la 2e. par une indéterminée k, et ajoutons à la 1re., nous aurons

$$(a+a'k)\left\{x+\frac{b+b'k}{a+a'k}y\right\}dt+dx+kdy=(T+Sk)\,dt.$$

Cela posé, il est visible que le 2e. terme $dx+kdy$ seroit la différentielle du 1er., abstraction faite de.... $(a+a'k)\,dt$, si on avoit

$$k=\frac{b+b'k}{a+a'k} \text{ ou } a'k^2+(a-b')\,k=b\,;$$

si donc on attribue à k l'une des valeurs que donne cette équation, on aura

$$(a+a'k)\,(x+ky)\,dt+dx+kdy=(T+Sk)\,dt$$

ou $$(a+a'k)\,udt+du=(R+Sk)\,dt$$

en faisant $x+ky=u$. Il sera aisé d'intégrer cette équation linéaire (761), et d'en tirer en fonction de t la valeur de u, ou $x+ky=ft$; on mettra tour-à-tour pour k les deux racines de notre équation, et il ne restera plus qu'à éliminer t entre les deux résultats.

Si les racines de k sont imaginaires, on remplacera les exponentielles par des sinus et cosinus, comme n°s. 786 et 787; et, si elles sont égales, on n'obtient, il est vrai, qu'une seule intégrale entre x y et t, mais on en tire la valeur de l'une de ces variables; et substituant dans l'une des proposées, on doit intégrer de nouveau l'équation résultante à deux variables.

793. Si on a trois équations, et quatre variables x, y, z et t, pour éliminer z et t et obtenir une relation entre x et y, on les mettra sous la fo

$$(ax + by + cz)dt + dx = Tdt$$
$$(a'x + b'y + c'z)dt + dy = Sdt$$
$$(a''x + b''y + c''z)dt + dz = Rdt$$

Nous supposons T, S et R fonctions de t seul, et les autres coefficiens constans. Pour opérer de même, multiplions la 2e. par k et la 3e. par l; k et l étant deux indéterminées; puis ajoutant le tout, mettons le résultat sous la forme

$$dt(a+a'k+a''l)\left\{x+\frac{b+b'k+b''l}{a+a'k+a''l}y+\frac{c+c'k+c''l}{a+a'k+a''l}z\right\}$$
$$+dx+kdy+ldz=(T+Sk+Rl)\,dt.$$

Or, il est clair que la partie renfermée entre les crochets, aura pour différentielle $dx+kdy+ldz$, si on détermine l et k par les conditions

$$\frac{b+b'k+b''l}{a+a'k+a''l}=k,\ \frac{c+c'k+c''l}{a+a'k+a''l}=l;$$

donc, si on fait $x+ky+lz=u$; on aura

$$(a+a'k+a''l)\,udt+du=(T+Sk+Rl)\,dt.$$

Intégrant cette équation linéaire, il viendra u en fonction de t, ou $x+ky+lz=ft$; et comme k et l sont donnés par des équations du 3e. degré, en en substituant les racines dans cette intégrale, elle donnera trois équations entre x, y, t et z, qui serviront à éliminer t et z.

794. Si on a les équations du 2e. ordre

$$d^2y+(ady+bdx)\,dt+(cy+gx)\,dt^2=Tdt^2$$
$$d^2x+(a'dy+b'dx)\,dt+(c'y+g'x)\,dt^2=Sdt^2$$

on fera $\quad dy=pdt,\quad dx=qdt$

et on aura $\quad dp+(ap+bq+cy+gx)\,dt=Tdt$

$$dq+(a'p+b'q+c'y+g'x)\,dt=Sdt$$

on aura donc quatre équations entre les cinq variables p, q, x, y et t, et on les traitera par le procédé expliqué ci-dessus. On voit que ce genre de calcul s'applique en général aux équations du 1er. degré et de tous les ordres, quel que soit leur nombre.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS QUI RENFERMENT TROIS VARIABLES.

1. *Des Équations différentielles ordinaires.*

795. PUISQUE l'équation $dz = pdx + qdy$, résulte de la somme des dérivées (664) de $z = f(x, y)$ prises relativement à x et y considérées comme variables indépendantes, on en conclut que les fonctions de x et y représentées par p et q doivent être telles qu'on ait (663)

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} \quad \ldots\ldots \text{(1)}$$

Si une équation proposée satisfait à cette condition, on intégrera la différentielle exacte $pdx + qdy$, par le procédé du n°. 762; le résultat sera la valeur de z ou $f(x, y)$. C'est ainsi que, d'après l'exemple 1 de ce n°., on voit que l'intégrale de

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} + adx + 2by\, by$$

est $$z = by^2 + ax + \log c(x + \sqrt{1+x^2}).$$

796. Si l'équation proposée est

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

P Q et R étant des fonctions de x y et z, on pourra la mettre sous la forme $dz = pdx + qdy$, en faisant $p = -\frac{P}{R}$, $q = -\frac{Q}{R}$. Pour reconnoître si la condition (1) est remplie, il ne faut pas se borner à regarder x comme constant dans p, et y comme variable ; il faudra encore y regarder z comme une fonction de x et y, et par conséquent variable par rapport à celle-ci seulement. On en dira autant de q relativement à x : on a donc (633)

$$\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz},$$

à cause de $q = \frac{dz}{dy}$ et $p = \frac{dz}{dx}$. Remettons ici pour p et q leurs valeurs en P Q et R, nous aurons

$$P\frac{dR}{dy} - R\frac{dP}{dy} + R\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dR}{dx} + Q\frac{dP}{dz} - P\frac{dQ}{dz} = 0 \ldots (2)$$

équation qui exprime que z est une fonction de deux variables indépendantes, auxquelle elle est liée par une seule équation.

797. Soit F le facteur qui rend l'équation.......... $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ la différentielle exacte de....... $f(x, y, z) = 0$. Il suit des principes développés (p. 258) que si on fait x constant, ou $dx = 0$, l'équation $FQdy + FRdz = 0$ doit être une différentielle exacte entre y et z : on en doit dire autant pour $dy = 0$ et... $dz = 0$, d'où on tire

$$\frac{d.FR}{dy} = \frac{d.FQ}{dz}, \quad \frac{d.FP}{dz} = \frac{d.FR}{dx}, \quad \frac{d.FQ}{dx} = \frac{d.FP}{dy}.$$

ou
$$\left.\begin{aligned} F\left\{\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}\right\} &= Q\frac{dF}{dz}-R\frac{dF}{dy} \\ F\left\{\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx}\right\} &= R\frac{dF}{dx}-P\frac{dF}{dz} \\ F\left\{\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right\} &= P\frac{dF}{dy}-Q\frac{dF}{dx} \end{aligned}\right\} \ldots\ (3)$$

Or, si on multiplie respectivement ces équations par P Q et R, puisqu'on les ajoute, les deuxièmes membres se détruiront, en sorte que le facteur commun F disparoissant, on retombe sur la relation (2) ; donc on ne peut espérer de rendre la proposée intégrable à l'aide d'un facteur F, qu'autant que la condition (2) est satisfaite. Toute équation entre deux variables est intégrable, au moins par approximation, tandis qu'il n'en est pas de même des équations à trois variables ou plus.

798. Si les différentielles passent le 1er. degré, voici ce qui a lieu. Quelle que soit l'intégrale cherchée, en la différentiant, il est clair qu'on peut la mettre sous la forme $Pdx + Qdy + Rdz = 0$; donc la proposée doit être réductible à cet état, c'est-à-dire, que si on la résout par rapport à dz, les dx et dy ne doivent pas demeurer engagées sous le radical : elle n'est donc intégrable qu'autant qu'elle est décomposable en facteurs rationnels. Pour

$$Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + Ddxdy + Edxdz + Fdydz = 0;$$

en soumettant le radical compris dans la valeur de dz, et qui est

$$\sqrt{\{(E^2-4AC)dx^2 + 2(EF-2DC)dxdy + (F^2-4BC)dy^2\}}$$

à la condition connue (138), on trouve

$$(EF-2DC)^2-(E^2-4AC)(F^2-4BC)=0 \ldots\ (4)$$

Si cette équation est satisfaite, on aura à intégrer deux

équations de la forme $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, dont la proposée est le produit.

799. Pour intégrer $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, lorsque la condition (2) est remplie, on regardera comme constante l'une des variables, telle que z; puis on intégrera $Pdx + Qdy = 0$. Soit $f(x, y, z, Z) = 0$ l'intégrale, Z étant la constante arbitraire, qui peut contenir z. On différentiera cette équation complètement, et on comparera à la proposée; il devra en résulter pour dZ une équation indépendante de x et y, et fonction de z et Z seuls; l'intégration fera connoître Z. Ce procédé résulte des principes mêmes de la différentiation des équations (664).

I. Soit $dx\,(y+z) + dy\,(x+z) + dz\,(x+y) = 0$: en faisant $dz = 0$, on a $dx\,(y+z) + dy\,(x+z) = 0$, dont l'intégrale (757) est $(x+z)(y+z) = Z$. Différentions ce résultat et comparons à la proposée, nous aurons $dZ = 2zdz$, d'où $Z = z^2 + c$. Donc l'intégrale demandée est $xz + yz + xy = c$.

II. Avant de traiter l'équation $zdx + xdy + ydz = 0$, on la soumettra à la condition (2), et, comme $x + y + z$ n'est pas nul, on voit qu'elle n'est pas intégrable. Si on exécutoit le calcul indiqué pour l'intégration, on trouveroit que Z ne peut être dégagé de x et y.

III. Pour $dz\{x\,(x-a) + y(y-b)\} = (z-c)(xdx + ydy)$, on en dira autant, à moins que a et b ne soient nuls, alors on a $dz\,(x^2 + y^2) = (z - c)\,(xdx + ydy)$. On intègre en faisant $dz = 0$, d'où $x^2 + y^2 = Z^2$: différentiant et comparant à la proposée, on trouvera....... $Zdz = (z-c)\,dZ$, d'où $Z = A\,(z-c)$. Ainsi lorsque $a = b = 0$, l'intégrale de la proposée est

$$x^2 + y^2 = A^2\,(z-c)^2.$$

IV. Soit

$$dx(y^2+yz+z^2)+dy(z^2+xz+x^2)+dz(x^2+xy+y^2)=0,$$

en faisant $dz=0$, on aura à intégrer

$$\frac{dx}{x^2+xz+z^2}+\frac{dy}{y^2+yz+z^2}=0;\ \text{d'où}$$

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\left\{\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x\sqrt{3}}{2z+x}\right)+\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{y\sqrt{3}}{2z+y}\right)\right\}=Z_1,$$

ou $$\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{(xz+yz+xy)\sqrt{3}}{2z^2+xz+yz-xy}\right)=\tfrac{1}{2}Z_1z\sqrt{3},$$

en vertu de la formule du n°. 359. Cette expression revient à $Z=\dfrac{xz+yz+xy}{2z^2+xz+yz-xy}$. Différentiant et comparant à la proposée, on arrive à

$$-dZ=\frac{2dz\,(x+y+z)\,(xy+xz+yz)}{(2z^2+xz+yz-xy)^2},$$

ou $$-\frac{dZ}{Z^2}=\frac{2dz\,(x+y+z)}{xy+xz+yz};$$

Or, x et y ne doivent pas rester dans cette équation, et il faut les en chasser à l'aide de la valeur de Z. On a $\dfrac{1+Z}{Z}=\dfrac{2z\,(x+y+z)}{xy+xz-yz}$, ce qui donne

$$-\frac{dZ}{Z(1+Z)}=\frac{dz}{z},\ \text{d'où}\ Z=\frac{c}{z-c}:$$

ainsi l'intégrale cherchée est $xy+xz+yz=(x+y+z)$.

800. Si la condition (2) n'est pas satisfaite, et qu'on suive le procédé qu'on vient d'indiquer, alors dZ ne peut plus être exprimé en z et Z seuls. F étant le facteur qui rend intégrable $Pdx+Qdy$, et $u+Z$ l'intégrale de

$FPdx + FQdy$, en comparant la différentielle de $u + Z = 0$ avec $FPdx + FQdy + FRdz = 0$, on trouve

$$\frac{du}{dz} + \frac{dZ}{dz} = FR,$$

équation où $x\,y$ et z entrent; et il est clair que $u + Z = 0$ satisfera à la proposée toutes les fois que cette condition sera remplie. Or, on a vu (664) que dans la différentiation des équations, on suppose tacitement que les variables x et y sont dépendantes, en vertu d'une relation, arbitraire il est vrai, qui les lie l'une à l'autre. Dans le cas actuel, on ne peut intégrer sans rétablir cette dépendance. Soit φ une fonction quelconque et posons $Z = \varphi z$; en l'introduisant dans les équations ci-dessus, on voit que le système des deux équations

$$u + \varphi z = 0, \quad \frac{du}{dz} + \varphi' z = FR,$$

satisfait à la proposée, quelle que soit d'ailleurs la forme de la fonction φ.

Autrefois, les équations qui ne satisfont point à la condition d'intégrabilité, étoient appelées *Absurdes*, et on établissoit en principe qu'elles ne signifioient rien, et qu'un problême susceptible de solution ne pouvoit jamais conduire à ces sortes de relation, qu'on prétendoit équivaloir aux imaginaires. Monge prouva que cette opinion est fausse, en donnant la théorie précédente.

On voit donc que si on cherche une surface courbe qui remplisse certaines conditions, lesquelles, traduites en analyse, conduisent à une équation différentielle entre les coordonnées $x\,y$ et z, les points de l'espace qui satisfont au problême sont, dans le cas présent, non

pas tous les points d'une surface, mais tous ceux d'une courbe à double courbure (603), parce que l'équation ne peut exister qu'en se partageant d'elle-même en deux, ainsi que cela s'est souvent rencontré dans ce Traité. Bien plus, comme φ est arbitraire, ce n'est pas une seule courbe qui répond au problème, mais une infinité de courbes, qui sont liées par une loi commune.

Ainsi pour $zdx + xdy + ydz = 0$, on trouvera....
$F = \frac{1}{x}$, $R = y$, $y + z \log x = u$; d'où

$$y + z \log x + \varphi z = 0, \quad \log x + \varphi' z = \frac{y}{x}$$

pour les équations dont le système satisfait à la proposée, quelle que soit la fonction φ.

Dans l'exemple III du n°. 799, on a.............
$R = x(x-a) + y(y-b)$, $F = \frac{1}{z-c}$; donc

$$x^2 + y^2 + \varphi z = 0, \ (z-c) \cdot \varphi' z = x(x-a) + y(y-b).$$

2. *Des Equations différentielles partielles du premier ordre.*

801. Soit l'équation $dz = pdx + qdy$, p et q sont les différentielles partielles de z, par rapport à x et y respectivement. Nous avons donné les moyens de remonter de cette équation à son intégrale $z = f(x, y)$. Proposons-nous maintenant de trouver l'équation $z = f(x, y)$, par la seule connoissance de l'un des coefficiens p et q, ou d'une relation entre eux.

Soit d'abord donné $p = V$, V pouvant comprendre les variables x, y, z. Si on regarde y comme constant dans l'équation $dz = pdx + qdy$, on aura $dz = Vdx$. L'intégration de cette équation où z et x varient seuls, se

fera par les préceptes donnés ; mais il est visible que la constante additive peut contenir y d'une manière quelconque. C'est pourquoi on devra remplacer dans l'intégrale cette constante par φy, φ désignant *une fonction absolument arbitraire*. L'introduction de cette fonction résulte du calcul qui sert à les faire disparoître par la différentiation (665) ; elle contient d'ailleurs autant de constantes quelconques qu'on desire.

On voit donc qu'en général dans l'équation donnée $p = V$, il faut remplacer p par $\frac{dz}{dx}$; intégrer, y étant constant, puis remplacer la constante par φy.

1°. $p = 3x^2$ a pour intégrale $z = x^3 + \varphi y$.

2°. Celle de $p = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ est $z = \sqrt{(x^2 + y^2)} + \varphi y$

3° Pour $p\sqrt{(a^2 - y^2 - x^2)} = a$, on a

$$z = a \text{ arc}\left(\sin = \frac{x}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}\right) + \varphi y$$

4°. Pour $px = az$, on intègre $xdz = azdx$, et on a $z = x^a . \varphi y$

5°. Enfin pour $p(y^2 + x^2) = y^2 + z^2$, on trouve l'équation $dz(y^2 + x^2) = (y^2 + z^2)dx$: le facteur qui la rend intégrable est $(y^2 + z^2)^{-1}(y^2 + x^2)^{-1}$, (763, IV) ; et on obtient

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{y}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) = \varphi y$$

ou (359) $$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y(z-x)}{y^2 + xz}\right) = \varphi y$$

ou $$\frac{z-x}{y^2 + xz} = \varphi y, \text{ ou enfin } z = \frac{y^2\varphi y + x}{1 - x\varphi y}.$$

802. Prenons maintenant l'équation

$$Pp + Qq = R$$

la plus générale du 1er ordre et du 1er. degré, $P\,Q\,R$ étant des fonctions données de $x\;y$ et z. Eliminons p de $dz = pdx + qdy$, nous aurons

$$Pdz - Rdx = q\,(Pdy - Qdx) \;.\;.\;.\; (1)$$

équation à laquelle il s'agit de satisfaire de la manière la plus générale, q restant indéterminé. Soient α et β deux constantes, π et ϱ deux fonctions connues, qui peuvent contenir $x\,y$ et z, telles que $\pi = \alpha$, $\varrho = \beta$ satisfassent aux équations

$$Pdz - Rdx = 0,\; Pdy - Qdx = 0 \ldots (2)$$

puis formons l'équation $\pi = \varphi\varrho$, ϕ désignant une fonction quelconque. Cela posé, comme on suppose que $\pi = \alpha$ et $\varrho = \beta$ satisfont aux équations (2), si on tire de celles-ci les valeurs de dx et dy, et qu'on les substitue dans les différentielles complètes des premières, on aura ces résultats identiquement nuls.

$$P\frac{d\pi}{dx} + Q\frac{d\pi}{dy} + R\frac{d\pi}{dz} = 0\;.$$

$$P\frac{d\varrho}{dx} + Q\frac{d\varrho}{dy} + R\frac{d\varrho}{dz} = 0$$

mais la différentielle de $\pi = \varphi\varrho$ est

$$\frac{d\pi}{dx}dx + \frac{d\pi}{dy}dy + \frac{d\pi}{dz}dz = \varphi'\varrho.\left\{\frac{d\varrho}{dx}dx + \frac{d\varrho}{dy}dy + \frac{d\varrho}{dz}dz\right\}$$

en substituant pour $\frac{d\pi}{dx}$ et $\frac{d\varrho}{dx}$ leurs valeurs que donnent les équations précédentes, réunissant les termes semblables, et représentant par Φ un coefficient qui est fonction de

$\varphi'\rho$ et par conséquent arbitraire, on trouve ....
$P\mathrm{d}z - R\mathrm{d}x = \Phi\,(P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x)$. En comparant l'équation (2) à celle-ci, on reconnoît que $\pi = \varphi\rho$ satisfaisant à la proposée $Pp + Qq = R$, en est l'intégrale.

Si on fait $\varphi\rho =$ const. on aura $\pi =$ const. qui satisfera aussi à la question. On voit donc que $\pi = \alpha$ et $\rho = \beta$ sont des intégrales particulières.

I. Ainsi $qxy - px^2 = y^2$ donne $P = -x^2$, $Q = xy$, $R = y^2$: les équations (2) deviennent

$$x^2\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}x = 0,\quad x^2\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}x = 0\quad .$$

celle-ci s'intègre et donne $xy = \beta$; mettant dans la 1re. pour y sa valeur $\frac{\beta}{x}$, on a $\mathrm{d}z + \frac{\beta^2}{x^4}\mathrm{d}x = 0$, d'où ....
$z - \frac{\beta^2}{3x^3} = \alpha$; enfin remettant xy pour β, on trouve
$\pi = z - \frac{y^2}{3x} = \alpha$, $\rho = xy = \beta$; et l'intégrale cherchée est $3zx = y^2 + 3x\varphi\,(xy)$.

II. Pour $px + qy = n\sqrt{(x^2 + y^2)}$, on a

$$x\mathrm{d}z = n\mathrm{d}x\sqrt{(x^2 + y^2)},\ x\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x$$

on tire de celle-ci $\frac{y}{x} = \beta$; et chassant y de l'autre, elle devient $\mathrm{d}z = n\sqrt{(1 + \beta^2)}\,\mathrm{d}x$; d'où ....
$z - n\sqrt{(1 + \beta^2)}\,x = \alpha$: on remet pour β sa valeur et on trouve $\pi = z - n\sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\rho = \frac{y}{x}$; donc l'intégrale cherchée est $z = n\sqrt{(x^2 + y^2)} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

803. Lorsqu'il arrive que chacune des équations (2) ne contient que les variables dont elles renferment les différentielles, le calcul se présente sous la forme la plus simple. En voici des exemples.

III. Soit $px + qy = nz$; on trouve $xdz = nzdx$ et $xdy = ydx$; les intégrales étant $z = \alpha x^n$, $y = \beta x$, la condition $\alpha = \varphi\beta$ donne pour l'intégrale de la proposée $z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Si l'on observe que φ est homogène et que l'équation proposée n'est autre chose que le théorème des fonctions homogènes (763, IV), on en retrouvera ici une démonstration pour le cas de deux variables.

IV. Soit encore $px^2 + qy^2 = z^2$; on a $x^2dz - z^2dx = 0$, $x^2dy - y^2dx = 0$; d'où $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \alpha$, $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \beta$; donc $\frac{x-z}{xz} = \varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right)$ est l'intégrale demandée.

V. Pour $q = pX + V$, X et V étant des fonctions de x seul, on obtient $Xdz + Vdx = 0$, et $Xdy + dx = 0$. Et enfin $z = -\int\frac{Vdx}{X} + \varphi\left(y + \int\frac{dx}{X}\right)$.

On pourra s'exercer encore sur les exemples du n°. 665.

804. On parvient souvent à faciliter les intégrations en substituant pour p ou q sa valeur, tirée de la relation donnée, dans les équations suivantes que donne la 1re. par l'intégration par parties :

$$dz = pdx + qdy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$z = px + \int(qdy - xdp) \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$z = qy + \int(pdx - ydq) \ldots\ldots\ldots (3)$$
$$z = px + qy - \int(xdp + ydq) \ldots (4)$$

Nous en mettons ici quelques exemples pour montrer l'esprit de cette méthode.

VI. Soit $q = pV$, V étant une fonction donnée de x et y : la 1re. équation donne $z = \int p\,(dx + Vdy)$. Soit

F le facteur qui rend intégrable $dx + Vdy$, en sorte que $\int F(dx + Vdy) = S$, S étant connu en x et y ; on aura $z = \int \frac{pdS}{F}$, expression qui ne peut être intégrée à moins que $\frac{p}{F}$ ne soit une fonction de S, telle que $\varphi'S$. On a donc, φ désignant une fonction arbitraire,

$$z = \varphi S, \quad S = \int F(dx + Vdy).$$

VII. Si p est une fonction donnée de q, telle que $p = Q$, la relation (4) devient

$$z = Qx + qy - \int (xQ' + y)\, dq$$

d'où il suit que $xQ' + y$, facteur de dq, doit être fonction de q, sans x ni y ; on a donc

$$z + \varphi q = Qx + qy, \quad xQ' + y = \varphi' q$$

la fonction φ est arbitraire. L'intégrale résultera de l'élimination de q entre ces équations, lorsque cette fonction aura été déterminée (812).

VIII. Soit l'équation proposée $f(p, x) = F(q, y)$; faisons $f(x, p) = \theta$, d'où $F(q, y) = \theta$: résolvons par rapport à p et q, nous aurons pour p et q les fonctions

$$p = \psi(x, \theta), \; q = \chi(y, \theta), \; dz = \psi . dx + \chi dy.$$

Intégrons $\psi\, dx$ et χdy comme si θ étoit constant, et soient ξ et η les intégrales : en différentiant par rapport à xy et θ, on aura (633)

$$\psi dx = d\xi - \frac{d\xi}{d\theta} d\theta, \quad \chi dy = d\eta - \frac{d\eta}{d\theta} d\theta$$

donc.... $dz = d\xi + d\eta - d\theta . \frac{d(\xi + \eta)}{d\theta}$;

ce dernier terme devant être une différentielle exacte, il

faut qu'il soit une fonction de θ; donc

$$\frac{\mathrm{d}(\xi+\eta)}{\mathrm{d}\theta}=\varphi'\theta,\quad z+\varphi\theta=\xi+\eta$$

on éliminera θ après avoir déterminé la fonction arbitraire φ, d'après la nature du problème auquel la proposée répond.

Ainsi pour $a^2pq=x^2y^2$, on a

$$p=\frac{x^2}{a\theta}=\psi,\quad q=\frac{y^2\theta}{a}=\chi,\quad \xi=\frac{x^3}{3a\theta},\quad \eta=\frac{y^3\theta}{3a};$$

donc $y^3=\frac{x^3}{\theta^2}+\varphi'\theta,\quad 3az+\varphi\theta=\frac{x^3}{\theta}+y^3\theta.$

3°. *Des Equations différentielles partielles du second ordre.*

805. Dans ces équations, outre les coefficiens p et q du 1er. ordre, il en entre trois autres (663) que nous désignerons ainsi

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=r,\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}=s,\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2}=t\ \ldots\ (A)$$

ou $\quad \mathrm{d}p=r\mathrm{d}x+s\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}q=s\mathrm{d}x+t\mathrm{d}y\ \ldots\ (B)$

$$\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}p\mathrm{d}x+\mathrm{d}q\mathrm{d}y=r\mathrm{d}x^2+2s\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t\mathrm{d}y^2$$

Il s'agit d'intégrer les équations de la forme ...... $f(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$.

806. Remarquons d'abord qu'on doit considérer y comme constant dans les équations qui ont la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=P\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+Q,\quad \text{ou } r=Pp+Q$$

P et Q étant fonctions de $x\,y$ et z seuls; qu'ainsi on a une

équation aux différentielles ordinaires du 2e. ordre, entre deux variables x et z. Par exemple, si z n'entre pas dans P et Q, $\frac{dz}{dx} = p$ donne $\frac{dp}{dx} = Pp + Q$: la fonction $(Pp + Q)\,dx$ est linéaire entre les variables p et x, y est constant : l'intégrale est donc (761), (en faisant pour abréger $\int P dx = u$)

$$p = \frac{dz}{dx} = e^u \{\int e^{-u} Q dx + \varphi y\}$$

en mettant φy, ou une fonction arbitraire de y, au lieu de constante. Il faut intégrer de nouveau par rapport à x, et ajouter une seconde fonction arbitraire ψy : en sorte qu'il y en ait deux, comme il y a deux constantes dans les intégrales ordinaires du 2e. ordre.

Lorsque $P = 0$ on a $p = \int Q dx + \varphi y$

et $$z = \int dx \int Q dx + x\varphi y + \psi y$$

1°. Pour $ar = xy$, on a d'abord

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^2 y}{2a} + \varphi y$$

puis $$6az = x^3 y + x\varphi y + \psi y$$

2°. Soit $xyr = (n-1) yp + a$: comme on a .... $P = \frac{n-1}{x}$, $Q = \frac{a}{xy}$, une 1re. intégration donne

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-a}{(n-1)y} + x^{n-1} \varphi y$$

puis $$z = -\frac{ax}{(n-1)y} + \frac{x^n}{n} \varphi y + \psi y.$$

3°. Pour $xr = (n-1)\,p$ on trouve

$$nz = x^n\varphi y + \psi y.$$

4°. Il est clair que ceci s'applique aussi à l'équation

$$\frac{d^2z}{dy^2} = P\frac{dz}{dy} + Q, \text{ ou } t = Pq + Q$$

807. L'intégrale de $s = M$, ou $\frac{d^2z}{dxdy} = M$, rentre dans la théorie des cubatures et des planifications (755), M étant une fonction de x et y, on trouve . . . . . $z = \int dx \int M dy + \varphi x + \psi y$. C'est ainsi que pour. . . $s = ax + by$, on obtient

$$z = \tfrac{1}{2}xy(ax + by) + \varphi x + \psi y.$$

808. Soit $s = Mp + N$, ou $\frac{d^2z}{dxdy} = M.\frac{dz}{dx} + N$, M et N étant des fonctions données de x et y. Puisque $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{dp}{dy} = s$, on a $\frac{dp}{dy} = Mp + N$: or p et y sont ici seules variables ; x est constant, et on retombe sur une équation linéaire (761); d'où, en faisant $u = \int M dy$, pour abréger, on tire

$$p = \frac{dz}{dx} = e^u\{\varphi'x + \int e^{-u} N dy\},$$

intégrant ensuite par rapport à x, on a

$$z = \int e^u dx \int e^{-u} N dy + \int e^u \varphi' x . dx + \psi y.$$

Par exemple, pour $sxy = bpx + ay$, on a d'abord

$$p = \frac{-ay}{(b-1)x} + y^b \varphi' x,$$

puis $$z = -\frac{ay \log x}{b-1} + y^b . \varphi x + \psi y.$$

809. Prenons l'équation linéaire

$$Rr + Ss + Tt = V, \text{ ou } R\frac{d^2z}{dx^2} + S\frac{d^2z}{dxdy} + T\frac{d^2z}{dy^2} = V.$$

$R\,S\,T$ et V sont des fonctions données de $x\,y\,z\,p$ et q.

Éliminons r et t entre les équations B qui servent de définition à ces fonctions, et substituons-en ici les valeurs, nous aurons

$$Rdpdy + Tdqdx - Vdxdy = s\{Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2\},$$

et supposons que α et β étant des constantes, on sache trouver deux fonctions $\pi = \alpha$ et $\rho = \beta$, qui rendent nuls chacun des deux membres de cette équation, ou qui donnent

$$Rdpdy + Tdqdx = Vdxdy$$
$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0.$$

Il s'agit de prouver qu'ici, comme n°. 802, $\pi = \varphi\rho$ satisfera à la proposée, quelle que soit la fonction φ. Pour le démontrer, ramenons d'abord ces équations au 1er. ordre, en faisant

$$dy = \Omega dx, \text{ d'où } R\Omega dp + Tdq = V\Omega dx \ldots (1)$$
$$R\Omega^2 - S\Omega + T = 0 \ldots (2)$$

équations qu'on suppose satisfaites par $\pi = \alpha$ et $\rho = \beta$; en sorte que Ω étant déterminé par les deux racines de l'équation (2), en fonction de $xy\ldots$, en substituant l'une dans les relations (1), elles doivent être vérifiées par $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$.

Formons donc les différentielles complètes $d\pi = 0$, $d\rho = 0$, contenant $dx\ dy\ dz\ dp$ et dq; puis, mettons $pdx + qdy$ pour dz, $\Omega\,dx$ pour dy, et enfin pour dq sa valeur tirée de (1), nous aurons deux sortes de termes, les uns multipliés par dx et les autres par dp. Or, la proposée

$Rr + Ss + Tt = V$ ne pouvant déterminer qu'une des quantités $r\ s\ t$ en fonction des autres et de $x\ y\ z\ p$ et q, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}p$ restent indépendans, et par conséquent chacune de nos équations $\mathrm{d}\pi = 0$, $\mathrm{d}\rho = 0$, se partagera en deux autres, en égalant à zéro séparément les coefficiens de $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}p$, après la substitution des valeurs de $\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}q$. On a ainsi

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x} + \Omega\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}y} + (p + q\Omega)\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}z} + \frac{V\Omega}{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}q} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} + \Omega\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}y} + (p + q\Omega)\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} + \frac{V\Omega}{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}q} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}p} = \frac{R\Omega}{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}q}, \qquad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} = \frac{R\Omega}{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}q}$$

Cela posé, l'équation $\pi = \varphi\rho$ étant différentiée complètement, ou $\mathrm{d}\pi = \varphi'\rho.\mathrm{d}\rho$, si on substitue pour ..... $\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x}\ \frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}p}\ \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\ \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$ leurs valeurs, tirées de nos quatre équations, et $p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$ pour $\mathrm{d}z$, en réunissant les termes semblables, on trouve

$$R\Omega\,\mathrm{d}p + T\mathrm{d}q - V\Omega\,\mathrm{d}x = \Phi \times (\mathrm{d}y - \Omega\,\mathrm{d}x),$$

en désignant par Φ une fonction indéterminée, puisqu'elle renferme $\varphi'\rho$. Or il est clair que $\pi = \alpha$, et $\rho = \beta$ satisfaisant aux équations (1), $\pi = \varphi\,\rho$ satisfait à celle-ci, ou à la proposée.

On se trouve donc conduit à traiter les équations (1); mais il faut remarquer qu'outre ces deux relations, on a $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$; ce qui ne fait que trois équations entre les cinq variables $x\ y\ z\ p$ et q. Ainsi l'élimination ne pouvant conduire qu'à une équation entre trois variables, il pourroit arriver que celle-ci ne remplît pas la condition nécessaire (796), pour qu'elle pût provenir

d'une seule équation primitive. On seroit alors conduit à une intégration inexécutable, sans que pour cela on fût en droit de conclure qu'elle n'est pas possible, et que l'équation différentielle proposée ne résulte pas d'une seule primitive.

810. Soit, par exemple, $rx^2 = ty^2$: on a ..... $R = x^2$, $T = -y^2$, $S = V = 0$. L'équation (2) devenant $x^2\Omega^2 = y^2$, les relations (1) sont

$$xdy = ydx \quad \text{et} \quad xdp - ydq = 0\,;$$

la 1re. donne $x = ay$, et mettant $\frac{x}{a}$ pour y dans la 2e., on a $adp = dq$, d'où $ap = q + a'$. Remettant donc $\frac{x}{y}$ pour a, et posant $a' = \varphi a$, en vertu de la condition $\pi = \varphi \rho$, il vient $px = qy + y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Telle est l'équation du 1er. ordre qu'il s'agit d'intégrer.

Mettons dans $dz = pdx + qdy$ pour p sa valeur tirée de cette dernière équation, nous aurons .... $xdz - ydx.\varphi = q(xdy + ydx)$; chaque membre étant séparément égalé à zéro (802), on trouve

$$xdy + ydx = 0 \quad \text{et} \quad xdz = ydx.\varphi.$$

Mais la 1re. donne $xy = c$, et introduisant pour y sa valeur $\frac{c}{x}$ dans la 2e., elle devient $dz = \frac{cdx}{x^2}.\varphi\left(\frac{x^2}{c}\right)$. L'intégrale du 2e. membre peut être mise sous la forme $x\varphi\left(\frac{x^2}{c}\right)$, φ désignant une autre fonction arbitraire ; c'est ce dont on s'assure aisément par la différentiation. Donc $z = x\varphi\left(\frac{x^2}{c}\right) + c'$: puis remettant xy pour c, et

à cause de $c' = \psi c$, ψ désignant une seconde fonction arbitraire, on a enfin

$$z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \psi(xy).$$

811. La complication de ces calculs empêche très-souvent qu'ils ne réussissent; mais dans le cas où les coefficiens R S et T sont constans, et V fonction de x et y; il deviennent très-simples; car alors l'équation (2) donne pour Ω deux valeurs numériques, telles que m et n: et les relations (1) auxquelles $\pi = \alpha$ et $\rho = \beta$ doivent satisfaire, s'intègrent et donnent

$$y = mx + \alpha \text{ et } Rmp + Tq = m\int V\mathrm{d}x$$
$$y = nx + c \text{ et } Rnp + Tq = n\int V\mathrm{d}x.$$

Prenons le premier système d'équations : on devra substituer dans V, pour y sa valeur $mx + \alpha$, si V est fonction de y : puis $\int V\mathrm{d}x$ ne dépendra plus que des quadratures. L'intégration faite, on ajoutera une constante β, et on remettra pour α sa valeur $y - mx$. On aura donc les équations cherchées $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, en sorte que de $\pi = \varphi'\rho$, ou $\beta = \varphi'\alpha = \varphi'(y - mx)$: on tire

$$Rmp + Tq = m\int V\mathrm{d}x + \varphi'(y - mx).$$

Le second système d'équations donne

$$Rnp + Tq = n\int V\mathrm{d}x + \psi'(y - nx);$$

mais il suffit de traiter l'un des deux, parce que l'autre conduit au même résultat, ainsi qu'il sera facile de s'en convaincre : on choisit celui qui se prête le mieux au calcul.

Il s'agit maintenant d'intégrer de nouveau : pour cela reprenons notre premier résultat, et tirons-en la valeur de p pour la mettre dans $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$: en réunissant

les termes semblables, et remarquant que par la nature des deux racines m et n de Ω, on a $Rmn = T$, on trouve

$$Rdz - dx\int V dx - dx\,\varphi'\,(y - mx) = Rq\,(dy - ndx);$$

en regardant la constante m comme comprise dans φ'. Or, pour intégrer cette équation (802), on égalera à zéro chaque membre séparément; d'où

$$y = nx + c,\quad Rz - \int dx\int V dx - \int dx\,\varphi'\,(y - mx) = b.$$

Il convient avant tout de faire quelques remarques:

1°. On devra mettre $nx + c$ pour y, et intégrer par rapport à x; puis on remettra $y - nx$ pour c dans le résultat.

2°. Les deux intégrales $\int dx\int V dx$ nécessitent une distinction importante, puisqu'on a d'abord mis $mx + a$ pour y dans V, et $y - mx$ pour a dans le résultat; tandis qu'on doit faire $y = nx + c$ dans $dx\int V dx$, et restituer $y - nx$ pour c.

3°. $\int dx.\varphi'(y - mx)$ devient $\int dx\,\varphi'\{x\,(n - m) + c\}$, ou $\dfrac{\varphi}{n - m}$, ou plutôt $\varphi\,\{(n - m)\,x + c\}$, en comprenant la constante $n - m$ dans φ: ainsi, on a $\varphi\,(y - mx)$.

4°. Enfin la constante b est une fonction quelconque ψ de c, ou $b = \psi\,(y - nx)$. Donc

$$Rz = \int dx\int V dx + \varphi\,(y - mx) + \psi\,(y - nx).$$

Par exemple, pour $r - s - 2t = \dfrac{k}{y}$, on a . . . . . .
$\Omega^2 + \Omega = 2$, d'où $m = 1$, $n = -2$ et . . . .
$y = x + \alpha$, $y = \alpha' - 2x$. Donc

$$\int V dx = \int \frac{k dx}{x + \alpha} = k \log\,(x + \alpha) = k \log y$$

$$\int dx\int V dx = \int k dx \log y = \int k dx \log\,(\alpha' - 2x).$$

Cette intégrale s'obtient aisément (730); elle devient $-kx - ky \log \sqrt{y}$, en remettant $2x + y$ pour α'. Ainsi

$$z + k(x + y \log \sqrt{y}) = \varphi(y - x) + \psi(y + 2x).$$

Pour $r = b^2 t$ ou $\frac{d^2z}{dx^2} = b^2 \frac{d^2z}{dy^2}$, qui est l'équation des cordes vibrantes (*Voy.* ma Mécanique, n°. 262), on a $R = 1$, $T = -b^2$, $S = 0 = V$, d'où $\alpha^2 = b^2$, $m = b = -n$, $y = bx + \alpha$, $y = \alpha' - bx$, enfin $\int dx \int V dx = 0$. Donc

$$z = \varphi(y - bx) + \psi(y + bx).$$

Nous renvoyons pour de plus amples détails sur cette matière, aux Mémoires et au Traité de Monge : au Calcul intégral d'Euler, aux collections académiques qui renferment les écrits de Lagrange, Laplace, Legendre, d'Alembert, ... enfin au Mémoire de Biot sur les surfaces vibrantes, *Savans étrangers*, an VIII, où cet habile géomètre donne un moyen d'intégrer par séries les équations différentielles partielles.

4. *Des Fonctions arbitraires.*

812. On dira pour les fonctions arbitraires $\varphi\, \psi$... des équations différentielles partielles, ce qu'on a dit (742) des constantes introduites dans les intégrations ordinaires. Tant qu'on ne veut qu'intégrer, c.-à-d., composer une expression qui, soumise aux règles du calcul différentiel, satisfasse à la proposée, les fonctions $\varphi\, \psi$... sont en effet quelconques. Mais si les résultats doivent être appliqués à des questions de géométrie, de mécanique, etc., ces fonctions cessent d'être arbitraires. Un exemple suffira pour l'intelligence de cet exposé.

On a vu (607, 665) que l'équation des surfaces cylindriques est

$$y - bz = \varphi(x - az), \text{ ou } ap + bq = 1.$$

La 1re. étant l'intégrale de la 2e., et la forme de la fonction φ dépendant de la courbe directrice. Or, si on veut que la base du cylindre sur le plan xy soit connue, en sorte que dans son équation $y = fx$, la forme de la fonction f soit donnée, il faudra que celle de φ soit telle, que cette base soit comprise parmi les points de l'espace que désigne l'équation $y - bz = \varphi(x - az)$. Si donc on y fait $z = 0$, les équations $y = \varphi x$, $y = fx$ seront identiques. Donc les fonctions φ et f ont même forme, c.-à-d., que si on change dans $y = fx$, y en $y - bz$ et x en $x - az$, l'équation qu'on obtiendra sera celle du cylindre particulier dont il s'agit, ... $y - bz = f(x - az)$.

Généralement, soient $M = 0$, $N = 0$ les équations de la directrice en xy et z : on fera $x - az = u$, et éliminant $x\, y$ et z entre ces trois équations, on en tirera leurs valeurs, et par suite celle de $\varphi u = y - bz$, en fonction de u, c.-à-d., qu'on aura la manière dont φu est composé en u. Il ne restera plus qu'à mettre $x - az$ pour u, dans $y - bz = \varphi u$, pour avoir l'équation de la surface cylindrique dont il s'agit.

813. Cet exemple suffit pour montrer comment on doit déterminer les fonctions arbitraires, afin d'appliquer nos calculs généraux aux cas particuliers qu'on peut se proposer. Soit en général $K = \varphi\, U$ une intégrale contenant une fonction arbitraire φ, K et U étant des fonctions données de $x\, y$ et z : la condition prescrite étant que l'équation devienne $F(x, y, z) = 0$, lorsque $f(x, y, z) = 0$. Cette condition revient en géométrie à

vent très-détournés. Il appartenoit au célèbre **Lagrange** de ramener toutes les solutions à une méthode unique, à une marche uniforme. Voici en quoi elle consiste.

Etant donnée une fonction Z de plusieurs variables x, y....... on peut se proposer de la faire jouir de diverses propriétés (telle que d'être un *maximum* ou toute autre), soit en assignant à ces variables des *valeurs numériques*, soit en établissant des relations entre ces variables et les *liant par des équations*. Soit, par exemple, $Z = F(x, y, y', y''.....)$; les quantités y', y''..... désignant les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$..... ce qui suppose que x et y sont liés par une dépendance mutuelle, telle que $y = \varphi x$. Si cette équation est donnée, on en déduit y, y', y''... en fonction de x, et, substituant, Z devient $= fx$. Parmi toutes les valeurs qu'on peut attribuer à x, on peut déterminer par les règles connues du calcul différentiel celles qui rendent fx un *maximum* ou un *minimum*. Mais si l'équation $y = \varphi x$ n'est point donnée, alors en prenant successivement pour φx différentes formes, la fonction $Z = fx$ prendra elle-même différentes expressions en x, et on peut se proposer d'assigner à φx une forme telle que Z soit plus grande ou plus petite que pour toute autre forme de φx, *quelle que soit d'ailleurs la valeur numérique de* x. Cette dernière espèce de problême appartient au calcul des variations. Il s'en faut de beaucoup qu'il se borne à la théorie des *maxima* et *minima;* mais nous nous contenterons de traiter cette matière, parce qu'elle suffit pour l'intelligence complète de ce calcul. N'oublions pas toutefois que dans ce qui va être dit, *les variables* x *et* y *ne sont pas indépendantes;* mais seulement que l'équation $y = \varphi x$ qui les lie entre elles est inconnue; et qu'on

ne la suppose donnée que pour faciliter la résolution du problême.

816. Mettons $x+i$ pour x, et $y+k$ pour y dans $Z=F(x, y, y', y''....)$, Z deviendra

$$Z_1 = F(x+i, y+k, y'+k', y''+k''....)$$

i et k sont deux fonctions de x, dont l'une est arbitraire ; l'autre en dépend en vertu de l'équation...... $y=\varphi x$; i', i''... sont pris ici dans la même signification que y', y''... D'après le théorême de Taylor (663) qui a lieu, que les quantités x, y, i, k soient dépendantes ou indépendantes, on a

$$Z_1 = Z + \left\{ i.\frac{dZ}{dx} + k.\frac{dZ}{dy} + k'\frac{dZ}{dy'} + k''.\frac{dZ}{dy''} + \text{etc.} \right\} + \text{etc.}$$

De sorte qu'on peut regarder $x, y, y', y''....$ comme autant de variables indépendantes, en tant qu'il ne s'agit que de trouver ce développement.

Cela posé, la nature de la question exige que l'équation $y=\varphi x$ ait été déterminée de manière que, quelle que soit la valeur de x, on ait toujours $Z_1 > Z$, ou $Z_1 < Z$: en raisonnant comme dans la théorie des *maxima* et *minima* ordinaires (677), on voit qu'il faut que les termes du premier ordre soient nuls, et qu'on ait

$$i.\frac{dZ}{dx} + k.\frac{dZ}{dy} + k'.\frac{dZ}{dy'} + k''.\frac{dZ}{dy''} + \text{etc.} = 0.$$

L'une des deux quantités k ou i, étant une fonction arbitraire de x, on peut supposer .... $k = a + b(x-X) + \frac{1}{2}c(x-X)^2 + \text{etc.}$, $X, a, b, c..$, étant quelconques : or comme cette équation et ses différentielles doivent avoir lieu, quel que soit x, elles devront subsister lorsque $x=X$, ce qui donne $k=a$, $k'=b$, $k''=c$,... donc notre équation ne peut être satisfaite,

vu l'indépendance de a, b, c,..... à moins que chaque terme ne soit nul. Ainsi elle se partage en autant d'autres qu'elle renferme de termes, et on a

$$\frac{dZ}{dx}=0, \frac{dZ}{dy}=0, \frac{dZ}{dy'}=0, \frac{dZ}{dy''}=0, \ldots\ldots \frac{dZ}{dy^{(n)}}=0,$$

(n) étant l'ordre le plus élevé de y dans Z. Ces diverses équations devront s'accorder toutes entre elles, et subsister en même tems, quel que soit x. Si cet accord a lieu, il y aura *maximum* ou *minimum*, et la relation qui en résultera entre y et x sera l'équation cherchée $y = \varphi x$, qui aura la propriété de rendre Z plus grand ou plus petit que ne pourroit faire toute autre relation entre x et y. On distinguera le *maximum* du *minimum* suivant les théories ordinaires, d'après le signe des termes du 2ᵉ. ordre.

Mais si toutes ces équations donnent des relations différentes entre x et y, le problême sera impossible dans l'état de généralité qu'on lui a donné : et s'il arrive que quelques-unes seulement de ces équations s'accordent entre elles, alors la fonction Z aura des *maxima* et *minima* relatifs à quelques-unes des quantités x, y, y', y'',.... sans en avoir d'absolus et de communs à toutes ces quantités. Les équations qui s'accordent entre elles donneront les relations qui établissent les *maxima* et *minima* relatifs. Et si on ne veut rendre X un *maximum* ou un *minimum* que par rapport à l'une des quantités $x, y, y'. y''$,.... comme alors il ne faudra satisfaire qu'à une équation, le problême sera toujours possible.

817. Il suit des considérations précédentes que

1°. Les quantités x et y sont dépendantes l'une de l'autre, et que néanmoins on doit les faire varier comme si elles étoient indépendantes, puisque ce n'est qu'un procédé de calcul pour parvenir au résultat.

2°. Ces variations ne sont pas infiniment petites; et si on emploie le calcul différentiel pour les obtenir, ce n'est que comme un moyen expéditif d'avoir le second terme du développement, le seul qui soit ici nécessaire.

Appliquons ces notions générales à des exemples.

I. Prenons sur l'axe des x d'une courbe deux abscisses m et n, et menons des parallèles indéfinies à l'axe des x : soit $y=\phi x$ l'équation de cette courbe; si par un point quelconque on mène une tangente, elle coupera nos parallèles en des points qui ont (678) pour ordonnées... $y+y'(m-x)$ et $y+y'(n-x)$. Si la forme de ϕ est donnée, tout est ici connu; mais si elle ne l'est point, on peut demander quelle est la courbe qui jouit de la propriété d'avoir, pour chaque point de tangence, le produit de ces deux ordonnées plus petit que pour toute autre courbe. On a ici

$$Z=\{y+(m-x)y'\}\{y+(n-x)y'\}$$

en cherchant $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{dZ}{dy}$ et $\frac{dZ}{dy'}$, il sera très-aisé de reconnoître que les résultats égalés à zéro donnent des équations incompatibles entre elles, tant que m est différent de n (abstraction faite de $y=0$, qui donne l'axe des x); ainsi Z n'est pas susceptible de remplir les conditions de la question. Mais si $m=n$, on a....., $Z=(y+(m-x)y')^2$; d'où on tire trois équations auxquelles on satisfait à la fois en faisant $y+(m-x)y'=0$, ou $ydx+(m-x)dy=0$. En intégrant on a $y=C(m-x)$, équation d'une droite : cette relation rend visiblement Z un *minimum*; car Z est alors nul, et cette fonction est positive dans toute autre hypothèse.

II. Quelle est la courbe pour laquelle, en chacun de ses points, le carré de la sous-normale augmenté de l'abscisse, soit un *minimum* ? On a $Z = (yy' + x)^2$, d'où on tire trois équations qui s'accordent en faisant $yy' + x = 0$, et par suite $x^2 + y^2 = r^2$. Donc tous les cercles décrits de l'origine comme centre, satisfont seuls à la question.

818. La théorie que nous venons d'exposer n'est pas d'une grande étendue, mais elle sert de développement préliminaire, utile pour l'intelligence du problême beaucoup plus intéressant qui nous reste à résoudre. Il s'agit d'appliquer tous les raisonnemens précédens à une fonction de la forme $\int Z$: le signe $\int$ indique que la fonction Z est différentielle, et qu'après l'avoir intégrée entre des limites designées, on veut la faire jouir des propriétés précédentes. La difficulté qui se rencontre ici, vient donc de ce qu'il faut résoudre le problême sans faire l'intégration ; car on voit assez qu'il est, en général, impossible de l'exécuter.

Au lieu de représenter par i et k les accroissemens des variables, nous emploierons le signe δ ; de sorte que δx, δy, ... seront des fonctions quelconques de $x, y, \ldots\ldots$ qui désigneront les accroissemens de ces variables. Pareillement dx devenant $d(x + \delta x)$ croîtra de $d\delta x$; d^2x croîtra de $d^2\delta x$, etc. Observons que les variations indiquées par le signe δ sont finies, et tout-à-fait indépendantes de celles que désigne la caractéristique d : les opérations auxquelles ces signes se rapportent étant pareillement indépendantes, l'ordre dans lequel on les exécutera doit être indifférent pour le résultat. De sorte que $\delta.dx$ et $d.\delta x$ sont deux choses identiques, aussi bien que $d^2\delta x$ et $\delta.d^2x$; .... et que $\int \delta U$ et $\delta \int U$.

Soit donc Z une fonction de x, y, z, dx, dy, dz,

d^2x, d^2y, d^2z,..... il s'agit d'établir des relations entre x, y et z de manière que $\int Z$ soit un *maximum* ou un *minimum entre des limites désignées.* Afin de rendre les calculs plus symétriques, nous ne supposerons aucune différentielle constante : d'ailleurs nous n'introduisons ici que trois variables, parce qu'il sera aisé de généraliser les résultats, et que ce cas suffit pour entendre la théorie. Pour abréger, remplaçons dx, d^2x... dy, d^2y,... etc. par $x_{,}$, $x_{,,}$... $y_{,}$, $y_{,,}$... etc.; de sorte que

$$Z=F\,(x,\ x_{,},\ x_{,,},\ldots y,\ y_{,},\ y_{,,},\ldots\ z,\ z_{,},\ z_{,,},\ldots).$$

Cela posé, si x, y et z reçoivent des accroissemens arbitraires et finis δx, δy, δz, dx ou $x_{,}$ deviendra... $d\,(x+\delta x)=dx+\delta dx=x_{,}+\delta x_{,}$: de même $x_{,,}$ croîtra de $\delta x_{,,}$, et ainsi des autres ; de sorte qu'en développant Z_{1}, par le théorème de Taylor et intégrant, $\int Z$ deviendra

$$\int Z_{1}=\int Z+\int\Big\{\frac{dZ}{dx}.\delta x+\frac{dZ}{dy}.\delta y+\frac{dZ}{dz}.\delta z+\frac{dZ}{dx_{,}}.\delta x_{,}+\frac{dZ}{dy_{,}}.\,dy_{,}$$
$$+\frac{dZ}{dz_{,}}.\delta z_{,}+\frac{dZ}{dx_{,,}}.\delta x_{,,}+\frac{dZ}{dy_{,,}}.\delta y_{,,}+\frac{dZ}{dz_{,,}}.\delta z_{,,}+\ldots\Big\}+\int \text{etc.}$$

et on observe que la condition du *maximum* et du *minimum* exige que l'intégrale des termes du premier ordre soit nulle entre les limites désignées, et cela *quels que soient* δx, δy et δz ; ainsi qu'on l'a vu précédemment. Prenons la différentielle de Z, en regardant x, $x_{,}$, $x_{,,}$... y, $y_{,}$, $y_{,,}$;.... etc. comme autant de variables indépendantes, nous aurons

$$dZ=Mdx+Ndx_{,}+Pdx_{,,}+\text{etc.}+mdy+ndy_{,}+pdy_{,,}+\text{etc.}$$
$$+\mu dz+\nu dz_{,}+\pi dz_{,,}+\text{etc.}$$

M, N,...m, n,... μ, ν,.... étant les coefficiens des différences partielles de Z par rapport à x, $x_{,}$,... y, $y_{,}$...

z, $z_{\prime}$.... traités comme autant de variables. Si on eût pratiqué cette différentiation absolument de la même manière en employant le signe δ, on auroit eu

$$\left.\begin{array}{l}\delta Z = M\delta x + N\delta.\mathrm{d}x + P\delta.\mathrm{d}^2x + Q\delta.\mathrm{d}^3x + \text{etc.}\\ \quad + m\,\delta y + n\delta.\mathrm{d}y + p\delta.\mathrm{d}^2y + q\delta.\mathrm{d}^3y + \text{etc.}\\ \quad + \mu\delta z + \nu\delta.\mathrm{d}z + \pi\delta.\mathrm{d}^2z + \chi\delta.\mathrm{d}^3z + \text{etc.}\end{array}\right\}\ldots\ (A).$$

Or, cette quantité est précisément celle qui est sous le signe $\int$ dans les termes du premier ordre de notre développement : en sorte que la condition du *maximum* ou du *minimum* demandée, est que $\int\delta Z = 0$, entre les limites désignées, quelles que soient les variations δx, δy, δz. Observons qu'ici, comme précédemment, le calcul différentiel n'est employé que comme un moyen facile d'obtenir l'assemblage des termes qu'il faut égaler à zéro ; de sorte que les variations sont encore ici finies et quelconques. D'ailleurs dans chaque cas particulier, on obtiendra aisément la valeur δZ, c'est-à-dire les quantités M, N,.... m, n,.... qui composent l'équation (A) dont le nombre de termes est limité : il suffira de différentier Z en employant le signe δ, et regardant x, y, z, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$,..... comme autant de variables indépendantes.

Nous avons dit qu'on pouvoit mettre $\mathrm{d}.\delta x$ au lieu de $\delta\mathrm{d}x$; ainsi la première ligne de l'équation équivaut à

$$M\delta x + N\mathrm{d}.\delta x + P\mathrm{d}^2\delta x + Q\mathrm{d}^3.\delta x + \text{etc.}$$

M, N,...... contiennent des différentielles, de sorte que le défaut d'homogénéité n'est ici qu'apparent. Il s'agit maintenant d'intégrer : or, la suite du calcul fera voir qu'il est nécessaire de dégager du signe $\int$, autant que possible, les termes qui contiennent $\mathrm{d}\delta$. Pour y parvenir on emploie la formule de l'intégration par parties, p. 335 :

de sorte qu'on obtient

$$\int N\mathrm{d}.\delta x = N\,\delta x - \int \mathrm{d}N.\delta x$$
$$\int P\mathrm{d}^2.\delta x = P\mathrm{d}.\delta x - \mathrm{d}P.\delta x + \int \mathrm{d}^2P.\delta x$$
$$\int Q\mathrm{d}^3.\delta x = Q.\mathrm{d}^2\delta x - \mathrm{d}Q.\mathrm{d}.\delta x + \mathrm{d}^2.Q.\delta x - \int \mathrm{d}^3Q.\delta x.$$

En réunissant ces résultats, on a cette suite dont la loi est facile à saisir

$$\int (M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2P - \mathrm{d}^3Q + \mathrm{d}^4R \ldots)\delta x + (N - \mathrm{d}P + \mathrm{d}^2Q - \mathrm{d}^3R \ldots)\delta x$$
$$+ (P - \mathrm{d}Q + \mathrm{d}^2R - \ldots)\mathrm{d}.\delta x + (Q - \mathrm{d}R + \ldots)\mathrm{d}^2.\delta x + (R - \ldots)\mathrm{d}^3.\delta x.$$

L'intégrale de (A), ou $\int.\delta Z = 0$, devient donc

$$(B)\ldots \int \{(M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2P - \ldots)\delta x + (m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2p \ldots)\delta y + (\mu - \mathrm{d}\nu + \ldots)\delta z\} = 0$$

$$(C)\ldots \begin{cases} (N - \mathrm{d}P + \mathrm{d}^2Q \ldots)\delta x + (n - \mathrm{d}p + \mathrm{d}^2q \ldots)\delta y + (\nu - \mathrm{d}\pi + \ldots)\delta z \\ + (P - \mathrm{d}Q + \mathrm{d}^2R \ldots)\mathrm{d}.\delta x + (p - \mathrm{d}q + \mathrm{d}^2r \ldots)\mathrm{d}.\delta y + (\pi - \mathrm{d}\chi + \ldots)\mathrm{d}\delta z \\ + (Q - \mathrm{d}R + \ldots)\mathrm{d}.\delta x + \text{etc.} \ldots + K = 0 \end{cases}$$

K étant la constante arbitraire. Nous avons coupé notre équation en deux, parce que les termes qui restent sous le signe $\int$ ne pouvant être intégrés à moins qu'on ne donne à δx, δy, δz des valeurs particulières, ce qui est contre l'hypothèse, $\int\delta Z$ ne peut devenir $= 0$, à moins que ces termes ne soient nuls à part ; et même si la nature de la question n'établit entre δx, δy et δz, aucune relation, l'indépendance de ces variations exige que l'équation (B) se partage en trois autres :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2P - \mathrm{d}^3Q + \mathrm{d}^4R - \text{etc.} \\ 0 &= m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2p - \mathrm{d}^3q + \mathrm{d}^4r - \text{etc.} \\ 0 &= \mu - \mathrm{d}\nu + \mathrm{d}^2\pi - \mathrm{d}^3\chi + \mathrm{d}^4\psi - \text{etc.} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots (D).$$

819. Avant d'aller plus loin, il convient d'expliquer l'usage de ces diverses formules.

I. Les équations D sont différentielles, entre x y et z : elles ne peuvent d'ailleurs exprimer des conditions

distinctes, puisqu'elles détermineroient des valeurs numériques pour les variables : dans ce cas, la question seroit absurde. Ainsi les relations D, sont les équations cherchées. Si la question proposée se rapporte à la géométrie, ces équations différentielles sont celles de la courbe ou de la surface qui jouit de la propriété demandée.

II. Comme l'intégration est effectuée et doit être prise entre les limites désignées, les termes qui restent et composent l'équation (C) se rapportent à ces limites : cette équation (C) est devenue de la forme $K+L=0$, L étant une fonction de $x, y, z, \delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ Marquons d'un et de deux accens les valeurs numériques de ces variables à la première et à la seconde limite. Comme l'intégrale doit être prise entre ces limites, il faut marquer les divers termes de L, qui composent l'équation (C), d'abord d'un, puis de deux accens ; retrancher le 1[er]. résultat du second, et égaler à zéro (742) : de sorte que l'équation $L'' - L' = 0$ ne renferme plus de variables, puisque $x, \delta x, \ldots$ ont pris les valeurs $x', \delta x', \ldots x'', \delta x''$. assignées par les limites de l'intégration. On ne doit pas oublier que, dans toute la suite, les accens se rapportent aux limites de l'intégrale et ne désignent pas des dérivées. Il se présente maintenant quatre cas.

1°. *Si les limites sont données* et *fixes* (*), c'est-à-dire si les valeurs extrêmes de x, y et z sont constantes, comme $\delta x'$, $d.\delta x'$, etc. $\delta x''$, $d.\delta x''$, etc., sont nuls,

(*) Ce cas revient, en géométrie, à celui où on cherche une courbe qui, outre qu'elle doit jouir de la propriété de *maximum* ou *minimum* demandé, doit encore passer par deux points donnés. Les équations (D) sont celles de la courbe cherchée ; on en détermine les constantes par la condition que cette courbe passe par les deux points dont il s'agit.

tous les termes de L' et L'' sont nuls, et l'équation (C) est satisfaite d'elle-même. Alors on détermine les constantes que l'intégration introduit dans les équations (D) par les conditions que comportent les limites.

2°. *Si les limites sont arbitraires et indépendantes*, alors chacun des coefficiens de $\delta x'$ $\delta x''$. . . dans l'équation (C) est nul en particulier.

3°. *S'il existe des équations de conditions* pour les limites (*), c'est-à-dire si la nature de la question lie entre elles par des équations quelques-unes des quantités x', y', z', x'', y'', z'', on se servira des différentielles de ces équations pour obtenir plusieurs des variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, etc., en fonction des autres; en substituant dans $L''-L'=0$, ces variations se trouveront réduites au plus petit nombre possible : ces dernières étant absolument indépendantes, l'équation se partagera en plusieurs autres, en égalant leurs coefficiens à zéro.

Au lieu de cette marche on peut prendre la suivante qui est infiniment plus élégante. Soient $u=0$, $v=0$, . . . les équations de conditions données, on multipliera leurs variations δu, δv, . . . par des indéterminées λ, λ', . . . ; ce qui donnera $\lambda\delta u+\lambda'\delta v+\ldots$ Ajoutant cette somme à $L''-L'$, on aura

$$L''-L'+\lambda\delta u'+\lambda'\delta v+\ldots=0.$$

On traitera toutes les variations $\delta x'$, $\delta x''$, . . . comme indépendantes, et égalant leurs coefficiens à zéro, on éliminera entre ces équations les indéterminées λ, λ',. . . On parviendra par ce calcul au même résultat que par la

(*) Cela signifie, en géométrie, que la courbe cherchée doit être terminée à des points qui ne sont plus fixes, mais qui doivent être situés sur deux courbes ou deux surfaces données.

méthode précédente ; car on n'a fait que des opérations permises, et on obtient ainsi le même nombre d'équations finales. Ce calcul revient à la méthode d'élimination donnée dans l'algèbre (113).

Il faut observer qu'on ne doit pas conclure de $u = 0$, qu'aux limites on ait $du = 0, \ldots$; ces conditions sont indépendantes, et peuvent fort bien ne pas co-exister. Si toutefois la chose avoit lieu ainsi (*), il faudroit regarder $du = 0, \ldots$ comme de nouvelles équations de conditions, et outre le $\lambda \delta u$, il faudroit aussi comprendre $\lambda' \delta du, \ldots$

4°. Nous ne dirons rien pour le cas où l'une des limites est fixe et la seconde assujétie à certaines conditions ou même tout-à-fait arbitraire (**), parce qu'il rentre dans les trois cas précédens.

III. Il pourroit aussi arriver que la nature de la question assujétît les variations δx, δy et δz à de certaines conditions données par des équations $\epsilon = 0$, $\theta = 0, \ldots$ (***) ; et cela indépendamment des limites ; comme, par exemple, lorsque la courbe cherchée doit être tracée sur une surface courbe donnée. Alors l'équation (*B*) ne se partageroit plus en trois, et les équations (*D*) n'auroient plus lieu. Il faudroit d'abord réduire, comme ci-dessus, les variations au plus petit nombre possible dans la formule (*B*) à l'aide des équations de condition, et égaler à zéro les coefficiens des variations restantes. Ou, ce qui revient au même,

---

(*) S'il s'agit d'une question de géométrie, la courbe cherchée doit, dans ce cas, avoir à sa limite un contact d'un certain ordre avec la courbe ou la surface dont l'équation est $u = 0$.

(**) Alors la courbe cherchée a une de ses extrémités assujétie à passer par un point fixe, tandis que l'autre doit être quelconque, ou située sur une courbe ou une surface donnée.

(***) La courbe demandée doit, dans ce cas, être décrite sur une surface donnée.

ajouter à (B) les termes $\lambda\delta\iota + \lambda'\delta\theta +$ etc. ; regarder ensuite δx, δy, δz comme indépendantes, et éliminer les indéterminées λ, λ', ...

Nous ferons observer que dans les cas particuliers, il est souvent plus court et préférable de faire sur la fonction donnée Z tous les calculs qui ont conduit aux équations (B) et (C), au lieu de comparer chaque cas particulier aux formules générales précédemment données.

2. *Applications.*

820. Tels sont les principes généraux du calcul des variations : appliquons-les à des exemples, afin de faire mieux saisir les détails précédemment exposés.

I. *Quelle est la courbe* CMK *dont la longueur* MK *comprise entre deux rayons vecteurs* AM *et* AK, *est la plus petite possible ?* La formule (707) donne .... 24.
$s = \int\sqrt{(r^2 d\theta^2 + dr^2)} =$ *minimum* ; on tire de la variation

$$M = 0,\ N = \frac{r^2 d\theta}{ds},\ m = \frac{r d\theta^2}{ds},\ n = \frac{dr}{ds}$$

d'où
$$\frac{r^2 d\theta}{ds} = c,\ \frac{r d\theta^2}{ds} = \mathrm{d}\left(\frac{dr}{ds}\right).$$

En mettant pour ds sa valeur, et en éliminant $d\theta$ entre ces équations, on reconnoît qu'elles s'accordent, en sorte qu'il suffit d'intégrer la 1[re]. Mais la perpendiculaire abaissée de l'origine A sur une tangente quelconque ..... TM est $= AM \times \sin AMT = r \sin\beta$, qui équivaut à ..
$\dfrac{r \tan\beta}{\sqrt{(1 + \tan^2\beta)}}$ ou $\dfrac{r^2 d\theta}{\sqrt{(r^2 d\theta^2 + dr^2)}} = \dfrac{r^2 d\theta}{ds}$: et comme cette perpendiculaire est ici constante, la ligne cherchée est droite. Les limites M et K étant indéterminées, elles n'ont pas exigé l'emploi des équations (C).

II. *Trouver la plus courte ligne entre deux points donnés, ou deux courbes données.*

La longueur s de la ligne est $\int Z = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, (696); il s'agit de rendre cette quantité un *minimum* entre les limites désignées. On en déduit aisément

$$\delta Z = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy + \frac{dz}{ds}\delta dz;$$

et comparant avec la formule (A) on trouve

$$M = 0,\ m = 0,\ \mu = 0,\ N = \frac{dx}{ds},\ n = \frac{dy}{ds},\ \nu = \frac{dz}{ds}:$$

les autres coefficiens $P, p, \pi, \ldots$ sont nuls. Les équations (D) deviennent donc ici $d\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0$, $d\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$, $d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$; d'où on conclut $dx = a ds$, $dy = b ds$ et $dz = c ds$. En carrant ces trois équations, et ajoutant, on obtient . . . $a^2 + b^2 + c^2 = 1$; ainsi ces équations sont compatibles entre elles, lorsqu'on détermine l'une des constantes a, b et c par cette condition. Par la division, on trouve . . $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{c}{a}$; d'où

$$bx = ay + a',\ cx = az + b',$$

ce qui apprend que les projections de la ligne cherchée sont des droites; ainsi cette ligne est elle-même une droite.

Pour en déterminer la position, il faudroit connoître les cinq constantes a, b, c, a' et b'. S'il s'agit de trouver
62. la plus courte distance entre deux points fixes A et C donnés, $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$, il est clair que $\delta x' \delta x'' \delta y' \ldots$ sont nuls et que l'équation (C) a lieu d'elle-même. En assujétissant nos deux équations à être satisfaites lorsqu'on

y substitue ces coordonnées respectives pour x, y et z, on obtiendra quatre équations entre les constantes ; ce qui résout le problème, puisqu'on a cinq équations, en y comprenant $a^2+b^2+c^2=1$.

Supposons que la seconde limite soit un point fixe C dans le plan xy, et la première une courbe AB située aussi dans ce plan ; l'équation $bx=ay+a'$ suffit alors. Soit $y'=fx'$ l'équation de AB ; on tire $\delta y'=A\,\delta x'$; l'équation (C) devient $L=\frac{dx}{ds}.\delta x+\frac{dy}{ds}.\delta y$; et comme la seconde limite C est fixe, il suffit de combiner ensemble les équations $\delta y'=A\delta x'$, et .... $dx'.\delta x'+dy'.\delta y'=0$. En éliminant $\delta y'$ on obtient $dx'+Ady'=0$. On auroit pu aussi multiplier l'équation de condition $\delta y'-A\delta x'=0$ par l'indéterminée λ, et ajouter à L', ce qui eût donné

$$\frac{dx'}{ds'}.\delta x'+\frac{dy'}{ds'}.\delta y'+\lambda\delta y'-\lambda A\delta x'=0,$$

équation qui se décompose en deux autres

$$\frac{dx'}{ds'}-\lambda A=0,\quad \frac{dy'}{ds'}+\lambda=0.$$

Eliminant λ, on obtient de même $dx'+Ady'=0$. Mais puisque le point A $(x'y')$, est sur notre droite AC, on a aussi $bdx'=Ady'$; d'où $a=-bA$, et...... $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{A}$; ce qui fait voir que la droite AC est normale (678) à la courbe proposée AB. La constante a' se détermine par la considération de la seconde limite.

Il seroit facile d'appliquer le raisonnement précédent aux trois dimensions, on parviendroit à la même conséquence : on peut donc conclure qu'en général la plus

62. xz, on a $y = 0$, et on en déduit

$$L = \frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}} . \delta x + \frac{dz}{ds\sqrt{(z-h)}} . \delta z.$$

Comme on a $\delta x'' = 0$, $\delta z'' = 0$, il suffit de rendre L' nul, en ayant égard à la première limite qui est une courbe AB dont $x' = fz'$ est l'équation donnée. On en déduit $\delta x' - A\delta z' = 0$; multipliant par λ, ajoutant à L', on trouve les deux équations

$$\frac{dx'}{ds'\sqrt{(z'-h)}} + \lambda = 0, \quad \frac{dz'}{ds'\sqrt{(z'-h)}} - A\lambda = 0.$$

En éliminant λ, on obtient $dz' + Adx' = 0$. Il est visible maintenant que la cycloïde devra couper à angle droit la courbe donnée AB ; la constante k sera déterminée en comparant l'équation de la cycloïde à la précédente. On trouveroit dans les trois dimensions la même conséquence,
63. de sorte que la courbe de plus vîte descente d'une courbe quelconque CD à une autre AB, est une cycloïde $A'C'$ normale à ces deux dernières. La même chose auroit aussi lieu pour deux surfaces courbes, ainsi qu'on peut s'en convaincre.

Si la courbe devoit être tracée sur une surface donnée par son équation $u = 0$, l'équation (B) ne se partageroit en trois autres qu'après avoir ajouté $\lambda\delta u$, ce qui donneroit au lieu des équations (1), trois équations entre lesquelles éliminant λ, on auroit les équations de la courbe cherchée. Si on avoit pour limites deux points fixes, les constantes seroient déterminées par la condition que la courbe passât par ces deux points : lorsqu'on a pour limites deux courbes, celle qu'on cherche doit les couper à angle droit comme ci-dessus. Ainsi le reste du problême est le même dans les deux cas.

IV. *Quelle est la courbe* CM *dont la longueur* s *soit donnée, qui passe en* C *et en* M, *et qui intercepte entre ses ordonnées terminales* BC PM *et l'axe* Ax, *l'aire la plus grande ou la plus petite?* Il est clair que $\int y dx$ doit être un *maximum* ou un *minimum*, l'arc s étant constant : il faut donc combiner la variation de $\int y dx$ avec celle de $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ — const. = o, suivant ce qu'on a vu 819, III, afin de pouvoir partager l'équation *B* en deux autres. On trouve pour la variation complète 51.

$$\int\left\{y\,\delta dx + dx\,\delta y + \frac{\lambda dx.\delta dx + \lambda\, dy.\delta dy}{ds}\right\} = o,$$

d'où $M = o,\ N = y + \lambda\frac{dx}{ds},\ m = dx,\ n = \lambda\frac{dy}{ds},$

et $$y + \lambda\frac{dx}{ds} = c,\quad x - \lambda\frac{dy}{ds} = c'.$$

Soit qu'on intègre l'une ou l'autre de ces équations, on parvient au même résultat, ce qui prouve qu'elles sont identiques, et on ne doit pas éliminer λ entre elles. La 1re. donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\{\lambda^2 - (y-c)^2\}}}{y-c},\ \text{d'où}\ (x-c')^2 + (y-c)^2 = \lambda^2.$$

La courbe cherchée est donc un cercle; suivant qu'il tourne sa convexité ou sa concavité à l'axe des x, l'aire est un *minimum* ou un *maximum*. On doit déterminer les constantes c c' et λ par la condition que le cercle passe par les points *C* et *M*, et que l'arc *CM* ait la longueur exigée. Tel est le plus simple des problèmes d'*Isopérimètres*.

V. *Quelle est la courbe* AM, *pour laquelle l'aire* BCMP *soit donnée, l'arc* CM *étant le plus court possible?* On a 51.

ici $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$ *minimum*, avec la condition. . . $\int ydx$ — const. $=0$. En imitant le raisonnement ci-dessus, on obtient

$$\frac{dx}{ds}+\lambda y=c,\quad \lambda x-\frac{dy}{ds}=c',$$

équations visiblement les mêmes que celles que nous venons de trouver : le cercle est donc encore la courbe demandée.

24. VI. *Entre deux rayons vecteurs* AM, AK *et l'arc* MK, *l'aire donnée* MAK *est renfermée : on demande quelle doit être la courbe* MK *la plus courte possible?* On doit avoir $s=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$ *minimum*, avec la condition (682), $\int\frac{1}{2}(xdy-ydx)=$ const : ce qui donne la variation

$$\frac{dx.\delta dx+dy.\delta dy}{ds}+\tfrac{1}{2}\lambda(dy.\delta x+x.\delta dy-dx.\delta y-y.\delta dx)=0.$$

$$\text{donc } \tfrac{1}{2}\lambda dy-d\left(\frac{dx}{ds}-\tfrac{1}{2}\lambda y\right)=0,\ \tfrac{1}{2}\lambda dx+d\left(\frac{dy}{ds}+\tfrac{1}{2}\lambda x\right)=0.$$

Ces équations s'accordent visiblement, en sorte qu'il suffit d'intégrer la 1re., λ étant une constante arbitraire ; il vient

$$\lambda y+c=\frac{dx}{ds}\text{ ou }(\lambda y+c)\,dy=dx\sqrt{\{1-(\lambda y+c)^2\}}.$$

On fera $\lambda y+c=z$, et l'intégration sera facile (712, IV) : on trouvera $(\lambda x+b)^2+(\lambda y+c)^2=1$, ou si on veut, $(x+b)^2+(y+c)^2=k^2$. La courbe cherchée est donc un cercle, assujéti à passer par les points M et K, et à former l'aire MAK de grandeur donnée. En sorte que toute autre courbe, passant par deux points M et K de cette circonférence, et formant la

même aire, auroit l'arc intercepté dans l'angle *MAK* plus long que l'arc du cercle, et cela quels que soient les points *M* et *K*. On verra de même que le cercle répond aussi au problème inverse : *de toutes les courbes, d'égale longueur entre deux points donnés, quelle est celle dont l'aire* MAK *est un* maximum *ou un* minimum ?

VII. *Parmi toutes les courbes planes terminées par deux ordonnées* BC PM, *et qui engendrent dans leurs révolutions des corps dont l'aire est la même, on demande quelle est celle qui produit le plus grand volume?* On a $\int \pi y^2 dx = maximum$, et $\int 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$ const. D'où il est facile de tirer 51.

$$\frac{2\lambda y dx}{ds} + y^2 = c, \quad y dx + \lambda ds = d\left(\frac{\lambda y dy}{ds}\right).$$

Ces équations s'accordent entre elles, et la 1re. donne

$$dx = \frac{(c - y^2)\,dy}{\sqrt{\{4\lambda^2 y^2 - (c - y^2)^2\}}} \ldots \quad (1).$$

Si la constante $c = 0$, on trouve $dx = \frac{-y dy}{\sqrt{(4\lambda^2 - y^2)}}$, d'où $(x - b)^2 + y^2 = 4\lambda^2$; équation d'un cercle dont le centre est en un lieu quelconque de l'axe des x, et qui doit passer par les deux points donnés. Toutefois ce cercle ne répondroit au problème qu'autant que l'aire engendrée par la révolution de l'arc *CM* se trouveroit avoir l'étendue exigée : en effet, l'équation intégrale ne renferme que deux constantes, qu'on a déterminées par la condition que la ligne passe par les points *C* et *M*. La solution générale du problème est donnée par l'équation (1).

VIII. *De toutes les courbes planes, d'égale longueur*

entre deux points donnés ; quelle est celle qui, dans sa révolution, engendre un volume ou une aire maximum?

Dans le 1er. cas, on a $\int \pi y^2 dx =$ *maximum* (697), et $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$ const. En raisonnant comme ci-dessus, on trouve

$$\pi y^2 + \frac{\lambda dx}{ds} = c, \text{ d'où } dx = \frac{(c - \pi y^2)\, dy}{\sqrt{\{\lambda^2 - (c - \pi y^2)^2\}}}.$$

La courbe dont il s'agit ici jouit de la propriété que son rayon de courbure R est $= \frac{\lambda}{2\pi y}$, ainsi qu'on peut aisément s'en convaincre (684, 6°.) ; en effet, on a

$$s' = \frac{\lambda}{c - \pi y^2}, y' = \sqrt{\left\{\left(\frac{\lambda}{c - \pi y^2}\right)^2 - 1\right\}}, y'' = \frac{2\lambda^2 \pi y}{(c - \pi y^2)^3}.$$

Cette courbe est l'*Elastique*, le rayon de courbure étant en raison inverse de l'ordonnée. Outre c et λ, on a une 3e. constante ; on les détermine par la condition que la courbe passe par les deux points donnés, et ait la longueur exigée.

Dans le 2e. cas, $\int 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ doit être un *maximum* (698), et en outre $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$ const. On en tire

$$\frac{2\pi y dx + \lambda dx}{ds} = c, \text{ d'où } dx = \frac{c dy}{\sqrt{\{(2\pi y + \lambda)^2 - c^2\}}}.$$

La courbe demandée est la *Chaînette* (p. 349), dont l'axe est horisontal : il y a *maximum* ou *minimum*, suivant qu'elle présente à l'axe des x sa concavité ou sa convexité.

IX. *Quelle est la courbe de longueur donnée* s, *entre deux points fixes, pour laquelle* $\int y ds$ *est un* maximum, on trouvera aisément

$$(y+\lambda)\frac{dx}{ds}=c\text{, d'où } dx=\frac{cdy}{\sqrt{\{(y+\lambda)^2-c^2)\}}}.$$

On obtient la même courbe que ci-dessus. Comme $\frac{\int y ds}{s}$ est l'ordonnée verticale du centre de gravité d'un arc de courbe dont s est la longueur (*Voy.* ma Mécanique, n°. 64), on voit que le centre de gravité d'un arc quelconque de la chaînette est plus bas que celui d'un autre arc terminé aux mêmes points.

X. En raisonnant de même pour $\int y^2 dx$ = *minimum* et $\int y dx$ = const., on trouve $y^2+y=c$, ou plutôt $y=c$: on a une droite parallèle aux x. Comme $\frac{\int y^2 dx}{2\int y dx}$ est l'ordonnée verticale du centre de gravité de toute aire plane (Mécanique, n°. 68), celui d'un rectangle vertical dont un côté est horisontal est le plus bas possible. En sorte que toute masse d'eau dont la surface supérieure est horisontale, a son centre de gravité le plus profondément situé.

Consultez l'ouvrage d'Euler, intitulé, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.*

FIN.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES DEUX VOLUMES.

Les chiffres indiquent les numéros de l'Ouvrage.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

L.

M.

Q.

R.

S.

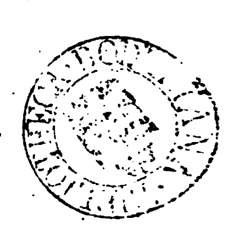
T.

U.

V.

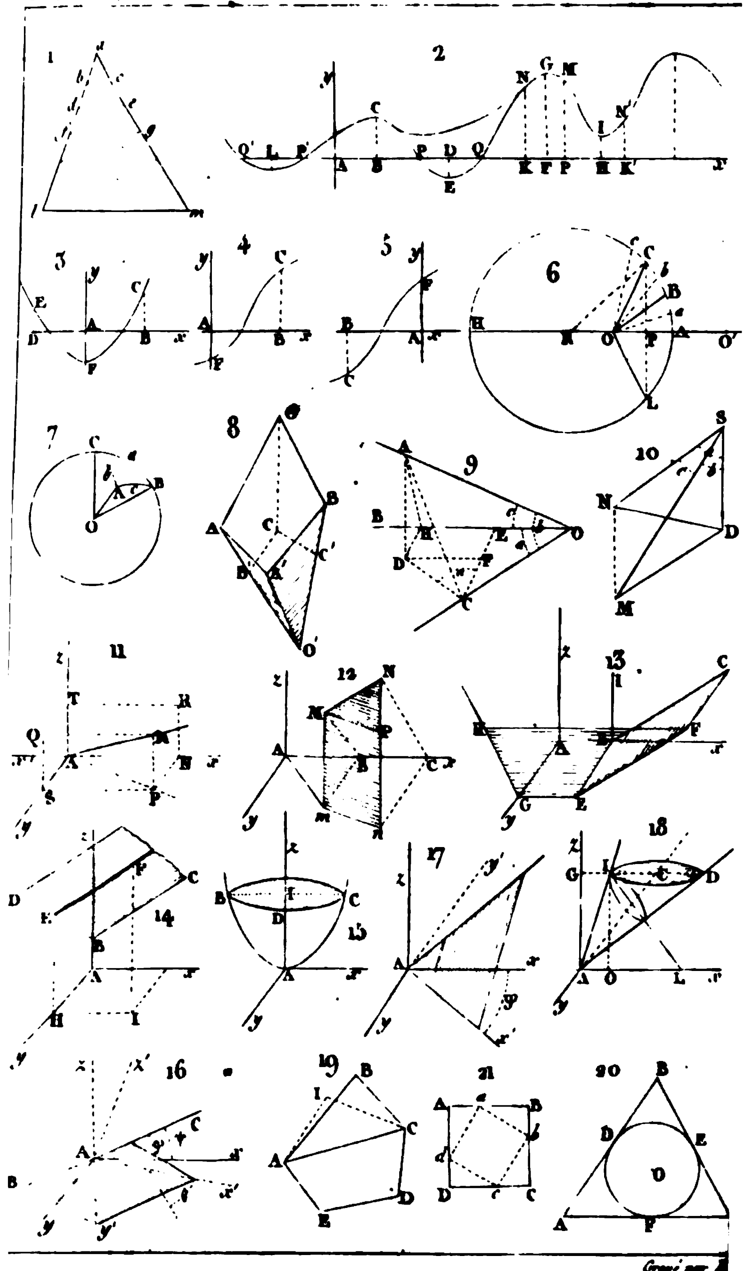
Z.

Fin de la Table des Matières.



Errata du Tome second.

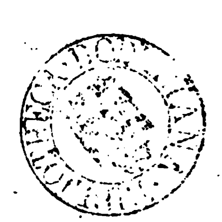
Page	11,	ligne 9;	645, *lisez*, 655.
	39,	dernière;	(541, V.), *lisez*, (541, VI),
	90,	dernière;	x^4, *lisez*, x^3.
	152,	6;	670; *lisez*, 671.
	186,	20;	696, *lisez*, 665.
	239,	dernière;	681 et 682, *lisez*, 684, 6°.



Gravé par

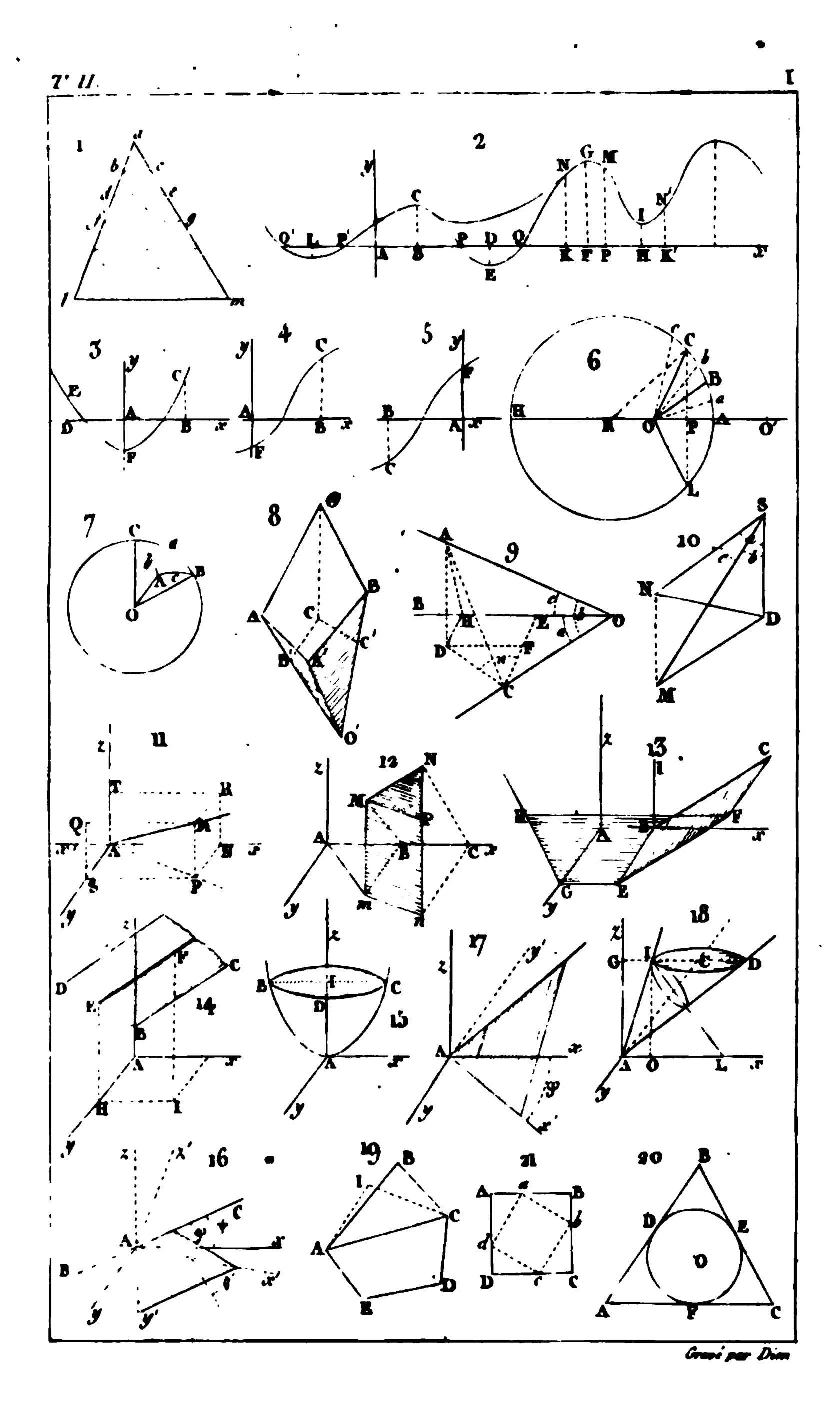
Z.

Fin de la Table des Matières.



Errata du Tome second.

Page	11, ligne	9;	645, *lisez*, 655.
	39,	dernière;	(541, V.), *lisez*, (541, VI).
	90,	dernière;	x^2, *lisez*, x^3.
	152,	6;	670; *lisez*, 671.
	186,	20;	696, *lisez*, 665.
	239,	dernière;	681 et 682, *lisez*, 684, 6°.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
Gravé par Dien

